反射テスト　複素数　共役複素数と絶対値　基礎　01

1.　次の条件を満たす z を求めよ．ただし，$\overline{z}$ は複素数 z の共役複素数，$|\,z\,|$ は複素数 z の絶対値とする．また，複素数 $z=a+bi$ のとき，z の絶対値は $|\,z\,|=\sqrt{a^2+b^2}$ である．　（ S 級 50 秒，A 級 2 分，B 級 3 分，C 級 5 分 ）

（1）　$\begin{cases} z+\overline{z}=2 \\ z\,\overline{z}=10 \end{cases}$

（2）　$\begin{cases} z+\overline{z}=3 \\ |z|=3 \end{cases}$

2. 次の条件を満たす z を求めよ．ただし，$\overline{z}$ は複素数 z の共役複素数，$|z|$ は複素数 z の絶対値とする．また，複素数 $z=a+bi$ のとき，z の絶対値は $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$ である． （ S 級 40 秒，A 級 1 分 20 秒，B 級 2 分 10 秒，C 級 3 分 ）

（1） $\begin{cases} z+\overline{z}=-4 \\ z\,\overline{z}=12 \end{cases}$

（2） $\begin{cases} z+\overline{z}=5 \\ |z|=5 \end{cases}$

反射テスト　複素数　共役複素数と絶対値　基礎　01　解答解説

1.　次の条件を満たす z を求めよ．ただし，$\overline{z}$ は複素数 z の共役複素数，$|z|$ は複素数 z の絶対値とする．また，複素数 $z=a+bi$ のとき，z の絶対値は $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$ である．　（ S 級 50 秒，A 級 2 分，B 級 3 分，C 級 5 分 ）

★ 共役複素数の計算
$$\begin{cases} ① & z \text{ が実数} \Leftrightarrow z=\overline{z} \\ ② & \overline{z_1 \pm z_2}=\overline{z_1}\pm\overline{z_2} \quad （\text{複号同順}） \\ ③ & \overline{z_1 \cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2} \\ ④ & \overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}=\dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} \quad （\text{ただし } z_2 \neq 0 ） \end{cases}$$

★ 複素数の絶対値　$|z|=\sqrt{z\cdot\overline{z}}$

(1) $\begin{cases} z+\overline{z}=2 \\ z\overline{z}=10 \end{cases}$

★ $z+\overline{z}$，$z\overline{z}$ の値から解と係数の関係を用いて，2 次方程式を解く．

解と係数の関係より，

z は　$z^2-2z+10=0$ の解．

$\Leftrightarrow \quad z=-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-1\cdot 10}$

$\Leftrightarrow \quad \boldsymbol{z=1\pm 3i}$

☆別解

$z=x+yi$ と考えて 2 元連立方程式を解く．

$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+yi)+(x-yi)=2 \\ (x+yi)(x-yi)=10 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x^2+y^2=10 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \ x=1$，$y=\pm 3$

(2) $\begin{cases} z+\overline{z}=3 \\ |z|=3 \end{cases}$

$|z|=3 \quad \Leftrightarrow \quad z\overline{z}=9$

解と係数の関係より，

z は　$z^2-3z+9=0$ の解．

$\Leftrightarrow \quad z=\dfrac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\cdot 1\cdot 9}}{2}$

$\Leftrightarrow \quad \boldsymbol{z=\dfrac{3\pm 3\sqrt{3}i}{2}}$

☆別解

$z=x+yi$ と考えて 2 元連立方程式を解く．

$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+yi)+(x-yi)=3 \\ (x+yi)(x-yi)=9 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{3}{2} \\ x^2+y^2=9 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \ x=\dfrac{3}{2}$，$y=\pm\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

☆参考類題

$\begin{cases} z-\overline{z}=i & \cdots ① \\ |z|=1 & \cdots ② \end{cases}$　を解け．

☆解答

与式 $\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{z}{i}-\dfrac{\overline{z}}{i}=1 & \cdots ③ \\ z\overline{z}=1 & \cdots ④ \end{cases}$

$t=\dfrac{z}{i}$ とおくと $\overline{t}=\dfrac{\overline{z}}{\overline{i}}=-\dfrac{\overline{z}}{i}$

よって，③ $\Leftrightarrow \ t+\overline{t}=1 \quad \cdots ④$

$t\overline{t}=\dfrac{z}{i}\cdot\left(-\dfrac{\overline{z}}{i}\right)=z\overline{z}$

よって，④ $\Leftrightarrow \ t\overline{t}=1 \quad \cdots ⑤$

④と⑤から，解と係数の関係より，

t は $t^2-t+1=0$ の解だから，$t=\dfrac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$

$z=ti$ から $\boldsymbol{z=\dfrac{\pm\sqrt{3}+i}{2}}$

☆別解

$z=x+yi$ と考えて 2 元連立方程式を解く．

① $\Leftrightarrow \ (x+yi)-(x-yi)=i$

$\Leftrightarrow \ 2yi=i$

$\Leftrightarrow \Leftrightarrow \ y=\frac{1}{2}$

④ $\Leftrightarrow \ x^2+y^2=1$

$\therefore \ x^2+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=1 \Leftrightarrow x=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore \ z=\dfrac{\pm\sqrt{3}+i}{2}$

2. 次の条件を満たす z を求めよ．ただし，$\overline{z}$ は複素数 z の共役複素数，$|z|$ は複素数 z の絶対値とする．また，複素数 $z=a+bi$ のとき，z の絶対値は $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$ である． （ S 級 40 秒，A 級 1 分 20 秒，B 級 2 分 10 秒，C 級 3 分 ）

(1) $\begin{cases} z+\overline{z}=-4 \\ z\overline{z}=12 \end{cases}$

★ $z+\overline{z}$， $z\overline{z}$ の値から解と係数の関係を用いて，
2 次方程式を解く．

解と係数の関係より，
z は $z^2+4z+12=0$ の解．
$\Leftrightarrow \quad z=-2\pm\sqrt{2^2-1\cdot 12}$
$\Leftrightarrow \quad \boldsymbol{z=-2\pm 2\sqrt{2}i}$

☆別解
$z=x+yi$ と考えて 2 元連立方程式を解く．
$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+yi)+(x-yi)=-4 \\ (x+yi)(x-yi)=12 \end{cases}$
$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ x^2+y^2=12 \end{cases}$
$\Leftrightarrow \ x=-2\ ,\quad y=\pm 2\sqrt{2}$

(2) $\begin{cases} z+\overline{z}=5 \\ |z|=5 \end{cases}$

$|z|=5 \quad \Leftrightarrow \quad z\overline{z}=25$

解と係数の関係より，
z は $z^2-5z+25=0$ の解．
$\Leftrightarrow \quad z=\dfrac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4\cdot 1\cdot 25}}{2}$
$\Leftrightarrow \quad \boldsymbol{z=\dfrac{5\pm 5\sqrt{3}i}{2}}$

☆別解
$z=x+yi$ と考えて 2 元連立方程式を解く．
$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+yi)+(x-yi)=5 \\ (x+yi)(x-yi)=25 \end{cases}$
$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{5}{2} \\ x^2+y^2=25 \end{cases}$
$\Leftrightarrow \ x=\dfrac{5}{2}\ ,\quad y=\pm\dfrac{5\sqrt{3}}{2}$