

反射テスト 複素数 色々な方程式 01

1. 複素数の範囲で次の方程式を z について解け. (S 級 1 分, A 級 2 分 30 秒, B 級 4 分, C 級 6 分)

(1) $z^2 + z + 1 = 0$

(2) $z + \frac{8}{z} = 4$

(3) $z^2 = i$

2. 複素数の範囲で次の方程式を z について解け. (S 級 1 分 30 秒, A 級 3 分, B 級 5 分, C 級 7 分)

(1) $z^2 + 3z + 21 = 0$

(2) $z + \frac{5}{z} = -4$

(3) $z^2 = -4i$

反射テスト 複素数 色々な方程式 01 解答解説

1. 複素数の範囲で次の方程式を z について解け. (S 級 1 分, A 級 2 分 30 秒, B 級 4 分, C 級 6 分)

★ $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$, i は虚数単位) に対して,
 $z = 0 \Leftrightarrow a = 0$ かつ $b = 0$

☆ $\mathbb{R}$ は実数の意.

★知識 $\mathbb{N}$ …自然数, $\mathbb{Z}$ …整数, $\mathbb{Q}$ …有理数, $\mathbb{R}$ …実数, $\mathbb{C}$ …複素数

(1) $z^2 + z + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow z = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2}$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

(2) $z + \frac{8}{z} = 4$

題意から $z \neq 0$ であるから,

$$\Leftrightarrow z^2 + 8 = 4z$$

$$\Leftrightarrow z^2 - 4z + 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow z = -(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 1 \cdot 8}$$

$$\Leftrightarrow z = 2 \pm 2i$$

(3) $z^2 = i$

$$\Leftrightarrow (x + yi)^2 = i \quad (z = x + yi \text{ とおく. } x, y \in \mathbb{R})$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - y^2) + 2xyi = i$$

$$\Leftrightarrow x^2 - y^2 = 0 \text{ かつ } 2xy = 1$$

$$\Leftrightarrow y = \pm x \text{ かつ } 2xy = 1$$

$$y = x \text{ のとき, } 2x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$y = -x \text{ のとき, } -2x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}i$$

$x, y \in \mathbb{R}$ より,

$$(x, y) = \left(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \quad (\text{複号同順})$$

$$\therefore z = \pm \frac{1+i}{\sqrt{2}}$$

☆別解

$$z^2 = i \Rightarrow z^4 = -1 \Leftrightarrow (z^2 + \sqrt{2}z + 1)(z^2 - \sqrt{2}z + 1) = 0$$

として解く方法もある. 解が 4 つでてくるが, そのうち 2 つ

は, $z^2 = -i$ の解であることに注意が必要である.

☆ 1(3) の結果から, $\sqrt{i}$ も複素数であることがわかる.

一般に次のことが言える.

$\sqrt{x}$ は **実数について閉じていない** が ($\because \sqrt{\text{負の実数}} = \text{虚数}$), **複素数については閉じている**.

しかし, 1(2) のように 2 つ答えがでてくるので, このままでは **関数とは言えない**.

2. 複素数の範囲で次の方程式を z について解け。(S 級 1 分 30 秒, A 級 3 分, B 級 5 分, C 級 7 分)

(1) $z^2 + 3z + 21 = 0$

$$\Leftrightarrow z = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 21}}{2}$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{-3 \pm 5\sqrt{3}i}{2}$$

(2) $z + \frac{5}{z} = -4$

題意から $z \neq 0$ であるから,

$$\Leftrightarrow z^2 + 5 = -4z$$

$$\Leftrightarrow z^2 + 4z + 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow z = -2 \pm \sqrt{2^2 - 1 \cdot 5}$$

$$\Leftrightarrow z = -2 \pm i$$

(3) $z^2 = -4i$

$$\Leftrightarrow (x + yi)^2 = -4i \quad (z = x + yi \text{ とおく. } x, y \in \mathbb{R})$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - y^2) + 2xyi = -4i$$

$$\Leftrightarrow x^2 - y^2 = 0 \text{ かつ } xy = -2$$

$$\Leftrightarrow y = \pm x \text{ かつ } xy = -2$$

$$y = x \text{ のとき, } x^2 = -2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}i$$

$$y = -x \text{ のとき, } -x^2 = -2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$$

$x, y \in \mathbb{R}$ より,

$$(x, y) = (\pm\sqrt{2}, \mp\sqrt{2}) \quad (\text{複号同順})$$

$$\therefore z = \pm\sqrt{2}(1 - i)$$