

反射テスト 複素数 実数と複素数 01

1. 次の等式が成り立つように, 実数 x, y の値を定めよ. (S 級 1 分 50 秒, A 級 3 分, B 級 5 分, C 級 7 分)

$$(1) \quad 2x + y + xi + 2yi = 0$$

$$(2) \quad (3x + 2yi)(-x + yi) = -10$$

$$(3) \quad (1 - i)(x + yi) = 1 + 2i$$

$$(4) \quad \frac{x}{3 - 2i} + \frac{y}{3 + 2i} = \frac{6}{13}$$

2. 次の等式が成り立つように、実数 x, y の値を定めよ. (S 級 2 分 10 秒, A 級 3 分 20 秒, B 級 5 分 40 秒, C 級 8 分)

(1) $2x + y - xi + 2yi = 5$

(2) $(3x - 4yi)(-2x + yi) = -10$

(3) $(2 - i)(x + yi) = 1 - 2i$

(4) $\frac{x}{3 - 4i} + \frac{y}{3 + 4i} = \frac{i}{25}$

反射テスト 複素数 実数と複素数 01 解答解説

1. 次の等式が成り立つように、実数 x, y の値を定めよ。(S 級 1 分 50 秒, A 級 3 分, B 級 5 分, C 級 7 分)

★ $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$, i は虚数単位) に対して,

$$z = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ かつ } b = 0$$

☆ $\mathbb{R}$ は実数の意.

★ 数の分類 $\mathbb{N}$ …自然数, $\mathbb{Z}$ …整数, $\mathbb{Q}$ …有理数, $\mathbb{R}$ …実数, $\mathbb{C}$ …複素数

$$(1) \quad 2x + y + xi + 2yi = 0$$

$$\Leftrightarrow (2x + y) + (x + 2y)i = 0$$

$x, y \in \mathbb{R}$ より, $2 + y, x + 2y$ も実数

$$2x + y = 0 \quad \text{かつ} \quad x + 2y = 0$$

$$\Leftrightarrow x = y = 0$$

☆恒等式のイメージで解く.

$$(2) \quad (3x + 2yi)(-x + yi) = -10$$

$$\Leftrightarrow -3x^2 + 3xyi - 2xyi + 2y^2i^2 = -10$$

$$\Leftrightarrow (-3x^2 - 2y^2) + xyi = -10$$

$x, y \in \mathbb{R}$ より, $-3x^2 - 2y^2, xy$ も実数

$$-3x^2 - 2y^2 = -10 \quad (\cdots\textcircled{1}) \quad \text{かつ} \quad xy = 0 \quad (\cdots\textcircled{2})$$

$$\textcircled{2} \Leftrightarrow x = 0 \text{ 又は } y = 0$$

$$x = 0 \text{ のとき } \textcircled{1} \text{ から } -2y^2 = -10 \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{5}$$

$$y = 0 \text{ のとき } \textcircled{1} \text{ から } -3x^2 = -10 \Leftrightarrow x = \pm\frac{\sqrt{30}}{3}$$

$$\therefore (x, y) = \left(\pm\frac{\sqrt{30}}{3}, 0\right) \quad \text{又は} \quad (0, \pm\sqrt{5})$$

$$(3) \quad (1 - i)(x + yi) = 1 + 2i$$

$$\Leftrightarrow x + yi - xi - yi^2 = 1 + 2i$$

$$\Leftrightarrow (x + y) + (-x + y)i = 1 + 2i$$

$x, y \in \mathbb{R}$ より, $x + y, -x + y$ も実数

$$x + y = 1 \quad (\cdots\textcircled{1}) \quad \text{かつ} \quad -x + y = 2 \quad (\cdots\textcircled{2})$$

①, ②の連立解から,

$$(x, y) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

$$(4) \quad \frac{x}{3 - 2i} + \frac{y}{3 + 2i} = \frac{6}{13}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x(3 + 2i) + y(3 - 2i)}{(3 - 2i)(3 + 2i)} = \frac{6}{13}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3x + 2xi + 3y - 2yi}{3^2 + 2^2} = \frac{6}{13}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3(x + y) + 2(x - y)i}{13} = \frac{6}{13}$$

$$\Leftrightarrow 3(x + y) + 2(x - y)i = 13$$

$x, y \in \mathbb{R}$ より, $3(x + y), 2(x - y)$ も実数

$$3(x + y) = 6 \quad (\cdots\textcircled{1}) \quad \text{かつ} \quad 2(x - y) = 0 \quad (\cdots\textcircled{2})$$

①, ②の連立解から,

$$(x, y) = (1, 1)$$

2. 次の等式が成り立つように、実数 x, y の値を定めよ. (S 級 2 分 10 秒, A 級 3 分 20 秒, B 級 5 分 40 秒, C 級 8 分)

$$(1) \quad 2x + y - xi + 2yi = 5$$

$$\Leftrightarrow (2x + y) + (-x + 2y)i = 5$$

$x, y \in \mathbb{R}$ より, $2x + y, -x + 2y$ も実数

$$2x + y = 5 \quad \text{かつ} \quad -x + 2y = 0$$

$$\Leftrightarrow (x, y) = (2, 1)$$

☆恒等式のイメージで解く.

$$(2) \quad (3x - 4yi)(-2x + yi) = -10$$

$$\Leftrightarrow -6x^2 + 3xyi + 8xyi - 4y^2i^2 = -10$$

$$\Leftrightarrow (-6x^2 + 4y^2) + 11xyi = -10$$

$x, y \in \mathbb{R}$ より, $-6x^2 + 4y^2, 11xy$ も実数

$$-6x^2 + 4y^2 = -10 \quad (\cdots \textcircled{1}) \quad \text{かつ} \quad xy = 0 \quad (\cdots \textcircled{2})$$

$$\textcircled{2} \Leftrightarrow x = 0 \text{ 又は } y = 0$$

$$x = 0 \text{ のとき } \textcircled{1} \text{ から } 4y^2 = -10 \Leftrightarrow y = \pm \frac{\sqrt{10}}{2}i$$

$$y = 0 \text{ のとき } \textcircled{1} \text{ から } -6x^2 = -10 \Leftrightarrow x = \pm \frac{\sqrt{15}}{3}$$

x, y は実数であるから,

$$\therefore (x, y) = \left(\pm \frac{\sqrt{15}}{3}, 0 \right)$$

$$(3) \quad (2 - i)(x + yi) = 1 - 2i$$

$$\Leftrightarrow 2x + 2yi - xi - yi^2 = 1 - 2i$$

$$\Leftrightarrow (2x + y) + (-x + 2y)i = 1 - 2i$$

$x, y \in \mathbb{R}$ より, $2x + y, -x + 2y$ も実数

$$2x + y = 1 \quad (\cdots \textcircled{1}) \quad \text{かつ} \quad -x + 2y = -2 \quad (\cdots \textcircled{2})$$

①, ②の連立解から,

$$(x, y) = \left(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5} \right)$$

$$(4) \quad \frac{x}{3 - 4i} + \frac{y}{3 + 4i} = \frac{i}{25}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x(3 + 4i) + y(3 - 4i)}{(3 - 4i)(3 + 4i)} = \frac{i}{25}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3x + 4xi + 3y - 4yi}{3^2 + 4^2} = \frac{i}{25}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3(x + y) + 4(x - y)i}{25} = \frac{i}{25}$$

$$\Leftrightarrow 3(x + y) + 4(x - y)i = i$$

$x, y \in \mathbb{R}$ より, $3(x + y), 4(x - y)$ も実数

$$3(x + y) = 0 \quad (\cdots \textcircled{1}) \quad \text{かつ} \quad 4(x - y) = 1 \quad (\cdots \textcircled{2})$$

①, ②の連立解から,

$$(x, y) = \left(\frac{1}{8}, -\frac{1}{8} \right)$$