

反射テスト 複素数 分母の実数化 01

1. 分母を実数にする計算をせよ. i は虚数単位とする. (S 級 1 分 10 秒, A 級 1 分 50 秒, B 級 3 分, C 級 5 分)

(1) $\frac{-1+i}{i}$

(2) $\frac{1}{2+i}$

(3) $\frac{10+15i}{3-4i}$

(4) $\frac{1}{1+\sqrt{3}i} + \frac{1}{1-\sqrt{3}i}$

2. 分母を実数にする計算をせよ. i は虚数単位とする. (S 級 1 分 50 秒, A 級 3 分, B 級 5 分, C 級 7 分)

(1) $\frac{4-2i}{6i}$

(2) $\frac{1}{4-8i}$

(3) $\frac{39-26i}{12+5i}$

(4) $\frac{1}{2+\sqrt{5}i} - \frac{1}{2-\sqrt{5}i}$

反射テスト 複素数 分母の実数化 01 解答解説

1. 分母を実数にする計算をせよ. i は虚数単位とする. (S 級 1 分 10 秒, A 級 1 分 50 秒, B 級 3 分, C 級 5 分)

★ 分母の実数化

公式 1 a, b が実数, i が虚数単位であるとき, $\frac{1}{a+bi} = \frac{1 \times (a-bi)}{(a+bi)(a-bi)} = \frac{a-bi}{a^2+b^2}$

公式 2 異なる表現をすると, 複素数 z に対して, $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$

$$(1) \quad \frac{-1+i}{i}$$

$$(2) \quad \frac{1}{2+i}$$

$$\begin{aligned} \text{与式} &= \frac{(-1+i)\bar{i}}{i \cdot \bar{i}} \\ &= \frac{(-1+i) \cdot (-i)}{i \cdot (-i)} \\ &= \frac{i+1}{1} \\ &= 1+i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{与式} &= \frac{\overline{2+i}}{(2+i) \cdot \overline{(2+i)}} \\ &= \frac{2-i}{2^2+1^2} \\ &= \frac{2-i}{5} \end{aligned}$$

☆別解 1

$i^2 = -1 \Leftrightarrow 1 \div i = -i$ を用いて,

$$\text{与式} = -1 \div i + i \div i = i + 1$$

☆別解 2

分子分母に i を掛けて,

$$\text{与式} = \frac{(-1+i)i}{i^2} = -(-i-1) = 1+i$$

$$(3) \quad \frac{10+15i}{3-4i}$$

$$(4) \quad \frac{1}{1+\sqrt{3}i} + \frac{1}{1-\sqrt{3}i}$$

$$\begin{aligned} \text{与式} &= \frac{(10+15i)\overline{(3-4i)}}{(3-4i) \cdot \overline{(3-4i)}} \\ &= \frac{5(2+3i)(3+4i)}{3^2+4^2} \\ &= \frac{5(-6+17i)}{25} \\ &= \frac{-6+17i}{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{与式} &= \frac{1-\sqrt{3}i}{1^2+\sqrt{3}^2} + \frac{1+\sqrt{3}i}{1^2+\sqrt{3}^2} \\ &= \frac{(1-\sqrt{3}i) + (1+\sqrt{3}i)}{4} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

2. 分母を実数にする計算をせよ. i は虚数単位とする. (S 級 1 分 50 秒, A 級 3 分, B 級 5 分, C 級 7 分)

$$(1) \quad \frac{4-2i}{6i}$$

$$(2) \quad \frac{1}{4-8i}$$

$$\begin{aligned} \text{与式} &= \frac{2-i}{3i} \quad \dots \textcircled{1} \\ &= \frac{(2-i) \cdot \overline{3i}}{3i \cdot \overline{3i}} \\ &= \frac{(2-i) \cdot (-3i)}{3i \cdot (-3i)} \\ &= \frac{-6i-3}{9} \\ &= \frac{-1-2i}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{与式} &= \frac{\overline{4-8i}}{(4-8i) \cdot \overline{(4-8i)}} \\ &= \frac{4+8i}{4^2+8^2} \\ &= \frac{1+2i}{20} \end{aligned}$$

☆別解

① の分子分母に i を掛けて,

$$\text{与式} = \frac{(2-i)i}{3i^2} = \frac{2i+1}{-3} = -\frac{1+2i}{3}$$

$$(3) \quad \frac{39-26i}{12+5i}$$

$$(4) \quad \frac{1}{2+\sqrt{5}i} - \frac{1}{2-\sqrt{5}i}$$

$$\begin{aligned} \text{与式} &= \frac{(39-26i)\overline{(12+5i)}}{(12+5i) \cdot \overline{(12+5i)}} \\ &= \frac{13(3-2i)(12-5i)}{12^2+5^2} \\ &= \frac{13(26-39i)}{13^2} \\ &= 2-3i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{与式} &= \frac{2-\sqrt{5}i}{2^2+\sqrt{5}^2} - \frac{2+\sqrt{5}i}{2^2+\sqrt{5}^2} \\ &= \frac{(2-\sqrt{5}i)-(2+\sqrt{5}i)}{9} \\ &= -\frac{2\sqrt{5}i}{9} \end{aligned}$$