

## 反射テスト 複素数 複素数の絶対値 01

1. 次の複素数の絶対値を計算せよ. ただし, 複素数  $z = a + bi$  のとき,  $z$  の絶対値  $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$  である.  
( S 級 30 秒, A 級 50 秒, B 級 1 分 40 秒, C 級 2 分 30 秒 )

(1)  $1 + 2i$

(2)  $7$

(3)  $4i$

(4)  $2 - \sqrt{3}i$

(5)  $\frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$

(6)  $(a - b) + 2\sqrt{ab}i$   
ただし,  $a, b$  は正の実数.

2. 次の複素数の絶対値を計算せよ. ただし, 複素数  $z = a + bi$  のとき,  $z$  の絶対値  $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$  である.

( S 級 30 秒, A 級 50 秒, B 級 1 分 40 秒, C 級 2 分 30 秒 )

(1)  $3 + i$

(2)  $0$

(3)  $-i$

(4)  $\sqrt{6} - \sqrt{2}i$

(5)  $\frac{3 - 3\sqrt{3}i}{2}$

(6)  $\cos \theta + i \sin \theta$   
ただし,  $\theta$  は実数.

## 反射テスト 複素数 複素数の絶対値 01 解答解説

1. 次の複素数の絶対値を計算せよ. ただし, 複素数  $z = a + bi$  のとき,  $z$  の絶対値  $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$  である.  
( S 級 30 秒, A 級 50 秒, B 級 1 分 40 秒, C 級 2 分 30 秒 )

★ 複素数  $z$  の絶対値  $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$

$z = a + bi$  ( $a, b$  は実数) と表すとき,  $z$  の共役複素数は  $\bar{z} = a - bi$  である.

よって,  $|z| = \sqrt{(a + bi)(a - bi)} = \sqrt{a^2 + b^2}$  と表せる.

☆複素数は2つの実数で表される数であるため, そのままでは数の基本的性質である大小関係を判別できない. 絶対値は, それを克服する非常に重要なテーマである. また, 共役複素数はそのキーである.

☆絶対値  $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$  は, その形から複素平面における原点との距離を表すことがわかる.

(1)  $1 + 2i$

(2)  $7$

$$|1 + 2i| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

$$|7| = |7 + 0i| = \sqrt{7^2 + 0^2} = 7$$

☆別解

$$|7| = \sqrt{7 \cdot \bar{7}} = \sqrt{7^2} = 7$$

(3)  $4i$

(4)  $2 - \sqrt{3}i$

$$|4i| = |0 + 4i| = \sqrt{0^2 + 4^2} = 4$$

$$|2 - \sqrt{3}i| = \sqrt{2^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{7}$$

☆別解

$$|4i| = \sqrt{4i \cdot \overline{4i}} = \sqrt{4i \cdot (-4i)} = 4$$

☆別解

$$\begin{aligned} |2 - \sqrt{3}i| &= \sqrt{(2 - \sqrt{3}i) \cdot \overline{(2 - \sqrt{3}i)}} \\ &= \sqrt{(2 - \sqrt{3}i)(2 + \sqrt{3}i)} \\ &= \sqrt{2^2 + \sqrt{3}^2} = \sqrt{7} \end{aligned}$$

(5)  $\frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$

(6)  $(a - b) + 2\sqrt{ab}i$   
ただし,  $a, b$  は正の実数.

$$\begin{aligned} \left| \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} \right| &= \left| -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right| \\ &= \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |(a - b) + 2\sqrt{ab}i| &= \sqrt{(a - b)^2 + (2\sqrt{ab})^2} \\ &= \sqrt{a^2 - 2ab + b^2 + 4ab} \\ &= \sqrt{a^2 + 2ab + b^2} \\ &= \sqrt{(a + b)^2} \\ &= |a + b| \\ &= a + b \end{aligned}$$

2. 次の複素数の絶対値を計算せよ. ただし, 複素数  $z = a + bi$  のとき,  $z$  の絶対値  $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$  である.  
( S 級 30 秒, A 級 50 秒, B 級 1 分 40 秒, C 級 2 分 30 秒 )

(1)  $3 + i$

$$|3 + i| = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$$

(2)  $0$

$$|0| = |0 + 0i| = \sqrt{0^2 + 0^2} = 0$$

☆別解

$$|0| = \sqrt{0 \cdot \overline{0}} = \sqrt{0^2} = 0$$

(3)  $-i$

$$|-i| = |0 + (-1)i| = \sqrt{0^2 + (-1)^2} = 1$$

☆別解

$$|-i| = \sqrt{(-i) \cdot \overline{(-i)}} = \sqrt{(-i) \cdot i} = 1$$

(4)  $\sqrt{6} - \sqrt{2}i$

$$|\sqrt{6} - \sqrt{2}i| = \sqrt{(\sqrt{6})^2 + (-\sqrt{2})^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

☆別解

$$\begin{aligned} |\sqrt{6} - \sqrt{2}i| &= \sqrt{(\sqrt{6} - \sqrt{2}i) \cdot \overline{(\sqrt{6} - \sqrt{2}i)}} \\ &= \sqrt{(\sqrt{6} - \sqrt{2}i)(\sqrt{6} + \sqrt{2}i)} \\ &= \sqrt{\sqrt{6}^2 + \sqrt{2}^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

(5)  $\frac{3 - 3\sqrt{3}i}{2}$

$$\begin{aligned} \left| \frac{3 - 3\sqrt{3}i}{2} \right| &= \left| \frac{3}{2} + \left( -\frac{3\sqrt{3}}{2} \right) i \right| \\ &= \sqrt{\left( \frac{3}{2} \right)^2 + \left( -\frac{3\sqrt{3}}{2} \right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{27}{4}} \\ &= 3 \end{aligned}$$

(6)  $\cos \theta + i \sin \theta$   
ただし,  $\theta$  は実数.

$$\begin{aligned} |\cos \theta + i \sin \theta| &= \sqrt{(\cos \theta)^2 + (\sin \theta)^2} \\ &= \sqrt{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta} \\ &= 1 \end{aligned}$$

☆ この式は複素平面を考える上でも, 重要な式である.

☆参考 (発展)

18 世紀の大数学者オイラーは解析学を用いて,  
 $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$  を導いた.

ここで  $\theta = \pi$  とおくと,

$$e^{i\pi} = \cos \pi + i \sin \pi$$

$$\Leftrightarrow e^{i\pi} = -1 \quad (\text{オイラーの式})$$

数学史上最も美しい式と言われている.