

反射テスト 複素数 共役複素数 01

1. 次の複素数の共役複素数を求めよ. i は虚数単位とする. (S 級 35 秒, A 級 55 秒, B 級 1 分 20 秒, C 級 2 分)

(1) $2 + 3i$

(2) 5

(3) i

(4) $(3 + 4i) + (5 - i)$

(5) $(2 + i)(3 - 2i)$

(6) $\frac{-1 + 5i}{i}$

2. 次の複素数の共役複素数を求めよ. i は虚数単位とする. (S 級 40 秒, A 級 1 分, B 級 1 分 30 秒, C 級 2 分 20 秒)

(1) $7 - 4i$

(2) 0

(3) $3i$

(4) $(3 + 6i) - (5 + i)$

(5) $(2 - 3i)(3 - 2i)$

(6) $\frac{-10 - 6i}{2i}$

反射テスト 複素数 共役複素数 01 解答解説

1. 次の複素数の共役複素数を求めよ. i は虚数単位とする. (S級 35秒, A級 55秒, B級 1分20秒, C級 2分)

★ 複素数 $a + bi$ (a, b は実数) の共役複素数は $a - bi$ である.

★ 複素数 z の共役複素数を \bar{z} と表す. つまり $\overline{a + bi} = a - bi$ である.

★ $z = a + bi$ であるとき, $z\bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$ であり, 必ず実数値をとる.

★ 上の性質から z の絶対値 $|z|$ を $\sqrt{z\bar{z}}$ と定める. つまり $|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$ である.

(1) $2 + 3i$

(2) 5

$$\overline{2 + 3i} = 2 - 3i$$

$$5 = 5 + 0i \text{ と考えて,}$$

$$\bar{5} = \overline{5 + 0i}$$

$$= 5 - 0i$$

$$= 5$$

$$\star z \in \text{実数} \Leftrightarrow z = \bar{z}$$

(3) i

(4) $(3 + 4i) + (5 - i)$

$$\bar{i} = -i$$

$$\overline{(3 + 4i) + (5 - i)} = \overline{3 + 4i + 5 - i}$$

$$= \overline{8 + 3i}$$

$$= 8 - 3i$$

$$\star z \in \text{純虚数} \Leftrightarrow z + \bar{z} = 0$$

☆別解

$$\overline{(3 + 4i) + (5 - i)} = \overline{3 + 4i} + \overline{(5 - i)}$$

$$= 3 - 4i + (5 + i) = 8 - 3i$$

$$\star \overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$$

(z_1, z_2 は複素数)

(5) $(2 + i)(3 - 2i)$

(6) $\frac{-1 + 5i}{i}$

$$\overline{(2 + i)(3 - 2i)} = \overline{8 - i}$$

$$= 8 + i$$

$$\overline{\left(\frac{-1 + 5i}{i}\right)} = \overline{i + 5}$$

$$= 5 - i$$

☆別解

$$\overline{(2 + i)(3 - 2i)} = \overline{(2 + i) \cdot (3 - 2i)}$$

$$= \overline{(2 - i)(3 + 2i)} = 8 + i$$

$$(\because i^2 = -1 \Leftrightarrow -1 \div i = i)$$

☆別解

$$\overline{\left(\frac{-1 + 5i}{i}\right)} = \frac{\overline{-1 + 5i}}{\bar{i}}$$

$$= \frac{-1 - 5i}{-i} = -i + 5$$

$$\star \overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$$

(z_1, z_2 は複素数)

$$\star \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$$

(z_1, z_2 は複素数)

2. 次の複素数の共役複素数を求めよ. i は虚数単位とする. (S 級 40 秒, A 級 1 分, B 級 1 分 30 秒, C 級 2 分 20 秒)

(1) $7 - 4i$

$$\overline{7 - 4i} = 7 + 4i$$

(2) 0

$$\begin{aligned} 0 &= 0 + 0i \text{ と考えて,} \\ \overline{0} &= \overline{0 + 0i} \\ &= 0 - 0i \\ &= 0 \end{aligned}$$

★ $z \in \text{実数} \Leftrightarrow z = \bar{z}$

(3) $3i$

$$\overline{3i} = -3i$$

★ $z \in \text{純虚数} \Leftrightarrow z + \bar{z} = 0$

(4) $(3 + 6i) - (5 + i)$

$$\begin{aligned} \overline{(3 + 6i) - (5 + i)} &= \overline{3 + 6i - 5 - i} \\ &= \overline{-2 + 5i} \\ &= -2 - 5i \end{aligned}$$

☆別解

$$\begin{aligned} \overline{(3 + 6i) - (5 + i)} &= \overline{3 + 6i} - \overline{(5 + i)} \\ &= 3 - 6i - (5 - i) = -2 - 5i \end{aligned}$$

★ $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$
(z_1, z_2 は複素数)

(5) $(2 - 3i)(3 - 2i)$

$$\begin{aligned} \overline{(2 - 3i)(3 - 2i)} &= \overline{-13i} \\ &= 13i \end{aligned}$$

☆別解

$$\begin{aligned} \overline{(2 - 3i)(3 - 2i)} &= \overline{(2 - 3i)} \cdot \overline{(3 - 2i)} \\ &= (2 + 3i)(3 + 2i) = 13i \end{aligned}$$

★ $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$
(z_1, z_2 は複素数)

(6) $\frac{-10 - 6i}{2i}$

$$\begin{aligned} \overline{\left(\frac{-10 - 6i}{2i}\right)} &= \overline{5i - 3} \\ &= -3 - 5i \end{aligned}$$

($\because i^2 = -1 \Leftrightarrow -1 \div i = i$)

☆別解

$$\begin{aligned} \overline{\left(\frac{-10 - 6i}{2i}\right)} &= \frac{\overline{-10 - 6i}}{\overline{2i}} \\ &= \frac{-10 + 6i}{-2i} = -5i - 3 \end{aligned}$$

★ $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$
(z_1, z_2 は複素数)