

反射テスト 微分 実数解の個数 場合分け 01

1. 実数 a に対して、次の 3 次方程式の実数解の個数を求めよ. (S 級 2 分 45 秒, A 級 4 分, B 級 6 分, C 級 8 分)

(1) $x^3 - x - a = 0$

(2) $x^3 - 4x^2 - (a - 4)x + a = 0$

2. 実数 a に対して、次の 3 次方程式の実数解の個数を求めよ. (S 級 2 分 45 秒, A 級 4 分, B 級 6 分, C 級 8 分)

(1) $x^3 - 3x^2 - 9x + 27 - a = 0$

(2) $x^3 - (a + 4)x + a - 1 = 0$

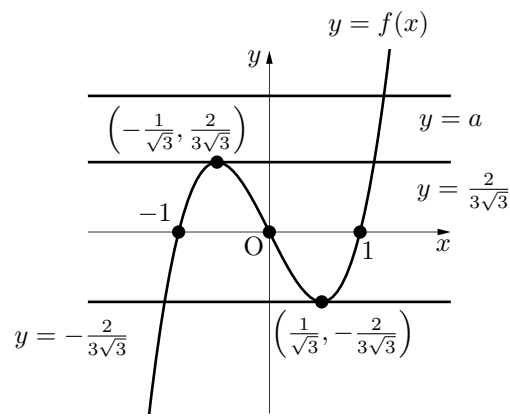
反射テスト 微分 実数解の個数 場合分け 01 解答解説

1. 実数 a に対して、次の 3 次方程式の実数解の個数を求めよ. (S 級 2 分 45 秒, A 級 4 分, B 級 6 分, C 級 8 分)

$$(1) \quad x^3 - x - a = 0$$

$$\Leftrightarrow x^3 - x = a$$

左辺を 3 次関数の曲線、右辺を x 軸に平行な直線と考える. 左辺は $f(x)$ とおく.



$$f(x) = (x + 1)x(x - 1)$$

$$f'(x) = 3x^2 - 1 = 3\left(x^2 - \frac{1}{3}\right) = 3\left(x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

x	$\cdots$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	極大値 $\frac{2}{3\sqrt{3}}$	$\searrow$	極小値 $-\frac{2}{3\sqrt{3}}$	$\nearrow$

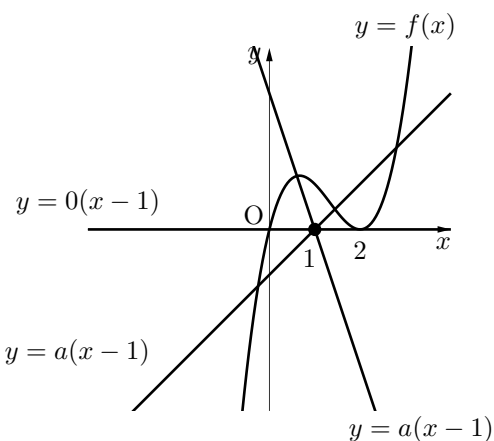
よって左図のように考えて、

$$\therefore \text{実数解の個数} \begin{cases} 1 \text{ 個} & \left(a < -\frac{2\sqrt{3}}{9} \text{ または } \frac{2\sqrt{3}}{9} < a \right) \\ 2 \text{ 個} & \left(a = \pm \frac{2\sqrt{3}}{9} \right) \\ 3 \text{ 個} & \left(-\frac{2\sqrt{3}}{9} < a < \frac{2\sqrt{3}}{9} \right) \end{cases}$$

$$(2) \quad x^3 - 4x^2 - (a - 4)x + a = 0$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 4x^2 + 4x = a(x - 1)$$

左辺を 3 次関数の曲線、右辺は点 $(1, 0)$ を通る直線と考える. 左辺は $f(x)$ とおく.



$$f(x) = x(x - 2)^2$$

$$f'(x) = 3x^2 - 8x + 4 = (3x - 2)(x - 2)$$

x	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	極大値	$\searrow$	極小値 0	$\nearrow$

接線になるときは、接点 $(p, f(p))$ において、

$$f(p) = a(p - 1) \quad \text{かつ} \quad f'(p) = a$$

を解いて、 $a = 0$ かつ $p = 2$

☆左図より明らかだが、次のページのために念のため.

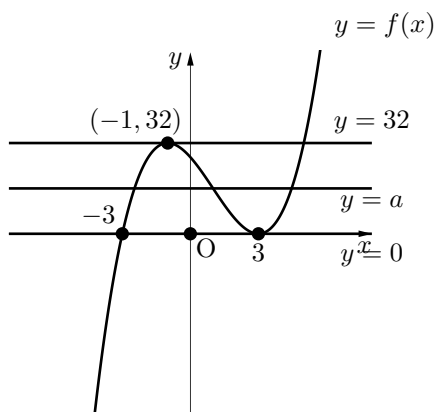
$$\therefore \text{実数解の個数} \begin{cases} 1 \text{ 個} & (a < 0) \\ 2 \text{ 個} & (a = 0) \\ 3 \text{ 個} & (0 < a) \end{cases}$$

2. 実数 a に対して、次の 3 次方程式の実数解の個数を求めよ。(S 級 2 分 45 秒, A 級 4 分, B 級 6 分, C 級 8 分)

$$(1) \quad x^3 - 3x^2 - 9x + 27 - a = 0$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 3x^2 - 9x + 27 = a$$

左辺を 3 次関数の曲線, 右辺を x 軸に平行な直線と考える. 左辺は $f(x)$ とおく.



$$f(x) = (x+3)(x-3)^2$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x^2 - 2x - 3) = 3(x+1)(x-3)$$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	極大値 32	$\searrow$	極小値 0	$\nearrow$

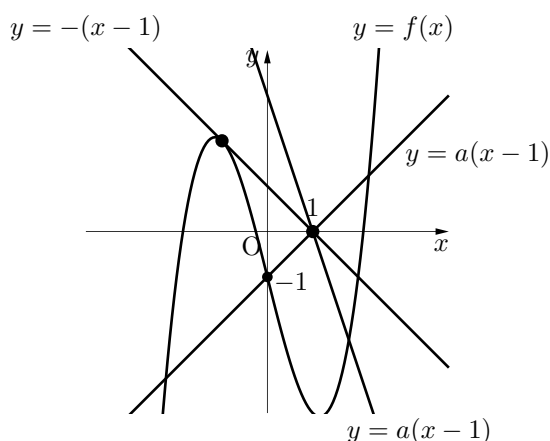
よって左図のように考えて,

$$\therefore \text{実数解の個数} \begin{cases} 1 \text{ 個} & (a < 0 \text{ または } 32 < a) \\ 2 \text{ 個} & (a = 0 \text{ または } a = 32) \\ 3 \text{ 個} & (0 < a < 32) \end{cases}$$

$$(2) \quad x^3 - (a+4)x + a - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 4x - 1 = a(x-1)$$

左辺を 3 次関数の曲線, 右辺は点 $(1, 0)$ を通る直線と考える. 左辺は $f(x)$ とおく.



$$f(x) = (x+2)x(x-2)$$

$$f'(x) = 3x^2 - 4 = 3\left(x + \frac{2}{\sqrt{3}}\right)\left(x - \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$$

x	$\cdots$	$-\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	極大値	$\searrow$	極小値	$\nearrow$

接線になるときは, 接点 $(p, f(p))$ において,

$$f(p) = a(p-1) \quad \text{かつ} \quad f'(p) = a$$

を解いて, $a = -1$ かつ $p = -1$

$$\therefore \text{実数解の個数} \begin{cases} 1 \text{ 個} & (a < -1) \\ 2 \text{ 個} & (a = -1) \\ 3 \text{ 個} & (-1 < a) \end{cases}$$