

反射テスト 三角比 正接の補算 01

1. 次の問いに答えよ. (S 級 50 秒, A 級 1 分 40 秒, B 級 2 分 30 秒, C 級 4 分)

(1) $\cos \theta = \frac{3}{5}$ であるとき, $\tan \theta$ を求めよ.

(2) $\sin \theta = -\frac{\sqrt{2}}{4}$ であるとき, $\tan \theta$ を求めよ.
ただし, $90^\circ < \theta < 270^\circ$

2. 次の問いに答えよ. (S 級 1 分, A 級 2 分, B 級 3 分 30 秒, C 級 5 分)

(1) $\cos \theta = -\frac{2\sqrt{13}}{13}$ であるとき, $\tan \theta$ を求めよ.
ただし, $0^\circ < \theta < 180^\circ$

(2) $\sin \theta = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ であるとき, $\tan \theta$ を求めよ.
ただし, $0^\circ < \theta < 90^\circ$

反射テスト 三角比 正接の補算 01 解答解説

1. 次の問いに答えよ. (S級 50 秒, A級 1 分 40 秒, B級 2 分 30 秒, C級 4 分)

$$\star \tan^2 \theta + 1 = \frac{1}{\cos^2 \theta} \text{ と } \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ の両辺を $\cos^2 \theta$ で割ると, この式を求めることができる.

この式を使えば, $\cos$ から, $\tan$ を求めることができる.

条件があるときは, 以下に注意する.

$$\begin{cases} 0^\circ < \theta < 90^\circ \text{ 又は } 180^\circ < \theta < 270^\circ & \Rightarrow \tan \theta > 0 \\ 90^\circ < \theta < 180^\circ \text{ 又は } 270^\circ < \theta < 360^\circ & \Rightarrow \tan \theta < 0 \end{cases}$$

もしくは, $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ を使って, $\sin$ と $\cos$ の両方を求めて, $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$ より, $\tan$ を求めてもよい.

(最初から $\sin$ と $\cos$ の両方がわかっている場合や, $\sin$ のみわかっている場合は, こちらを用いたほうが計算が早い.)

(1) $\cos \theta = \frac{3}{5}$ であるとき, $\tan \theta$ を求めよ.

$$\tan^2 \theta + 1 = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

$$\tan^2 \theta + 1 = \frac{1}{\left(\frac{3}{5}\right)^2}$$

$$\tan^2 \theta = \left(\frac{5}{3}\right)^2 - 1 \quad \leftarrow \star$$

$$\tan^2 \theta = \frac{25}{9} - 1$$

$$\tan^2 \theta = \frac{25}{9} - 1$$

$$\tan^2 \theta = \frac{16}{9}$$

$$\tan \theta = \pm \frac{4}{3} \quad \dots \text{答え}$$

☆連分数

$$\frac{\frac{1}{\frac{b}{a}}}{\frac{a}{b}} = 1 \div \frac{b}{a} = \frac{a}{b}$$

すなわち, 分母の逆数になる.

(2) $\sin \theta = -\frac{\sqrt{2}}{4}$ であるとき, $\tan \theta$ を求めよ.

ただし, $90^\circ < \theta < 270^\circ$

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

$$\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 + \cos^2 \theta = 1$$

$$\frac{2}{16} + \cos^2 \theta = 1$$

$$\cos^2 \theta = 1 - \frac{2}{16} \quad \leftarrow \star$$

$$\cos^2 \theta = \frac{14}{16}$$

$$\cos \theta = \pm \frac{\sqrt{14}}{4}$$

$90^\circ < \theta < 270^\circ$ より, $\cos \theta < 0$ であるから,

$$\cos \theta = -\frac{\sqrt{14}}{4}$$

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

$$= \frac{-\frac{\sqrt{2}}{4}}{-\frac{\sqrt{14}}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{14}} \quad \leftarrow \text{分母分子} \times (-4)$$

$$= \frac{\sqrt{28}}{14} \quad \leftarrow \text{分母の有理化}$$

$$= \frac{2\sqrt{7}}{14}$$

$$= \frac{\sqrt{7}}{7} \quad \dots \text{答え}$$

☆ポイント

なぜ約分せずに計算したのか考えて欲しい.

分母が平方数 (整数の二乗) のほうが,

$\cos \theta$ を求めやすいからである.

計算のコツは, 先を読むこと.

2. 次の問いに答えよ. (S級1分, A級2分, B級3分30秒, C級5分)

(1) $\cos \theta = -\frac{2\sqrt{13}}{13}$ であるとき, $\tan \theta$ を求めよ.
ただし, $0^\circ < \theta < 180^\circ$

$$\begin{aligned}\tan^2 \theta + 1 &= \frac{1}{\cos^2 \theta} \\ \tan^2 \theta + 1 &= \frac{1}{\left(-\frac{2\sqrt{13}}{13}\right)^2} \\ \tan^2 \theta &= \left(\frac{13}{2\sqrt{13}}\right)^2 - 1 \\ \tan^2 \theta &= \left(\frac{\sqrt{13}}{2}\right)^2 - 1 \quad \leftarrow \star \\ \tan^2 \theta &= \frac{13}{4} - 1 \\ \tan^2 \theta &= \frac{9}{4} \\ \tan \theta &= \pm \frac{3}{2}\end{aligned}$$

$\cos \theta < 0$ であるから, $90^\circ < \theta < 270^\circ$
よって, 条件の $0^\circ < \theta < 180^\circ$ とあわせて,
 $\Rightarrow 90^\circ < \theta < 180^\circ$
 $\Rightarrow \tan \theta < 0$
 $\tan \theta = -\frac{3}{2}$...答え

☆ポイント

$$\frac{13}{\sqrt{13}} = \frac{\sqrt{13}^2}{\sqrt{13}} = \sqrt{13}$$

(2) $\sin \theta = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ であるとき, $\tan \theta$ を求めよ.
ただし, $0^\circ < \theta < 90^\circ$

$$\begin{aligned}\sin^2 \theta + \cos^2 \theta &= 1 \\ \left(\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}\right)^2 + \cos^2 \theta &= 1 \\ \frac{\sqrt{6}^2 + 2\sqrt{12} + \sqrt{2}^2}{16} + \cos^2 \theta &= 1 \\ \frac{8 + 4\sqrt{3}}{16} + \cos^2 \theta &= 1 \\ \frac{2 + \sqrt{3}}{4} + \cos^2 \theta &= 1 \\ \cos^2 \theta &= 1 - \frac{2 + \sqrt{3}}{4} \\ \cos^2 \theta &= \frac{2 - \sqrt{3}}{4} \\ \cos^2 \theta &= \frac{8 - 4\sqrt{3}}{16} \\ \cos \theta &= \pm \sqrt{\frac{6 + 2 - 2\sqrt{12}}{16}} \quad \leftarrow \star \\ \cos \theta &= \pm \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

$0^\circ < \theta < 90^\circ$ より, $\cos \theta > 0$ であるから,
 $\cos \theta = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

$$\begin{aligned}\tan \theta &= \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \\ &= \frac{\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{\sqrt{6} - \sqrt{2}} \quad \leftarrow \text{分母, 分子} \times 4 \\ &= \frac{(\sqrt{6} + \sqrt{2})^2}{(\sqrt{6} - \sqrt{2})(\sqrt{6} + \sqrt{2})} \quad \leftarrow \text{分母の有理化} \\ &= \frac{8 + 2\sqrt{12}}{6 - 2} \\ &= \frac{8 + 4\sqrt{3}}{4} \\ &= 2 + \sqrt{3} \quad \text{...答え}\end{aligned}$$

☆ポイント 二重根号の外し方に注意する.

$$\sqrt{a + b - 2\sqrt{ab}} = \sqrt{a} - \sqrt{b} \quad (\text{ただし, } a > b)$$

問題の最初の代入で, $(\sqrt{6} + \sqrt{2})^2$ を展開したが, その形が頭に残っていれば難しくないだろう.

ちなみに, $15^\circ, 75^\circ, 90^\circ$ の三角形の辺の比は, 短い順に $(\sqrt{6} - \sqrt{2}) : (\sqrt{6} + \sqrt{2}) : 4$ である.
よって, 実はこの問いの θ は 75° となる.
覚えておくといい.