

## 反射テスト 絶対値 不等式 01

1. 実数の範囲内で次の不等式を解け。(S級1分20秒, A級2分, B級3分, C級4分)

(1)  $|x| < 5$

(2)  $|x| \geq \pi$

(3)  $|x + 3| \leq 10$

(4)  $|2x - 3| > 5$

(5)  $|x| < a$  (ただし  $a$  は実数)

(6)  $|x - a| \geq 3$  (ただし  $a$  は実数)

2. 実数の範囲内で次の不等式を解け。(S級2分10秒, A級3分30秒, B級5分, C級7分)

(1)  $|x| \leq \sqrt{32}$

(2)  $|x| > \sqrt{3 - 2\sqrt{2}}$

(3)  $|x - \sqrt{27}| < \sqrt{12}$

(4)  $|3x + 2| \geq 4$

(5)  $|x| \leq a$  (ただし  $a$  は実数)

(6)  $|ax - 1| \geq 3$  (ただし  $a$  は実数)

# 反射テスト 絶対値 不等式 01 解答解説

1. 実数の範囲内で次の不等式を解け。(S級1分20秒, A級2分, B級3分, C級4分)

★絶対値の入る不等式 (ただし  $B > 0$  のとき)

$$|A| < B \Leftrightarrow -B < A < B$$

$$|A| > B \Leftrightarrow x < -B \text{ 又は } B < A$$

(1)  $|x| < 5$

$$-5 < x < 5 \quad \dots\text{答え}$$

(2)  $|x| \geq \pi$

$$x \leq -\pi \text{ 又は } \pi \leq x \quad \dots\text{答え}$$

☆詳細

場合分けを考えて厳密に解くと以下のようなになる.

$$|x| < 5 \quad \begin{cases} \textcircled{1} x \geq 0 \text{ のとき (絶対値の中が正か0)} \\ \textcircled{2} x < 0 \text{ のとき (絶対値の中が負)} \end{cases}$$

$$\textcircled{1} x \geq 0 \text{ のとき } x < 5$$

$$\therefore 0 \leq x < 5 \quad \dots\textcircled{3}$$

$$\textcircled{2} x < 0 \text{ のとき } -x < 5 \Leftrightarrow x > -5$$

$$\therefore -5 < x < 0 \quad \dots\textcircled{4}$$

$$\textcircled{3} \text{ と } \textcircled{4} \text{ から } -5 < x < 5$$

☆ (1) の補集合と考えるとよい.

(3)  $|x+3| \leq 10$

$$-10 \leq x+3 \leq 10$$

$$-10-3 \leq x \leq 10-3$$

$$-13 \leq x \leq 7 \quad \dots\text{答え}$$

(4)  $|2x-3| > 5$

$$2x-3 < -5 \text{ 又は } 5 < 2x-3$$

$$2x < -2 \text{ 又は } 8 < 2x$$

$$x < -1 \text{ 又は } 4 < x \quad \dots\text{答え}$$

(5)  $|x| < a$  (ただし  $a$  は実数)

$$\text{答え} \begin{cases} a > 0 \text{ のとき, } -a < x < a \\ a \leq 0 \text{ のとき, } x \text{ は解なし} \end{cases}$$

(6)  $|x-a| \geq 3$  (ただし  $a$  は実数)

$$x-a \leq -3 \text{ 又は } 3 \leq x-a$$

$$x \leq a-3 \text{ 又は } a+3 \leq x \quad \dots\text{答え}$$

☆詳細

$a > 0$ ,  $a = 0$ ,  $a < 0$  で場合分けを考えてみる.

$a = 0$  のとき,  $0 < x < 0$  となって,  $x$  は解なし.

$a < 0$  のとき,  $|x|$  が0以上なため,

$|x|$  が負の  $a$  よりも小さいときはない.

ゆえに,  $x$  は解なし.

以上の結果を合わせて,  $a \leq 0$  のときとした.

2. 実数の範囲内で次の不等式を解け。(S級2分10秒, A級3分30秒, B級5分, C級7分)

(1)  $|x| \leq \sqrt{32}$

$$-\sqrt{32} \leq x \leq \sqrt{32}$$

$$-4\sqrt{2} \leq x \leq 4\sqrt{2} \quad \dots \text{答え}$$

(2)  $|x| > \sqrt{3-2\sqrt{2}}$

$$\sqrt{3-2\sqrt{2}} = \sqrt{2} - \sqrt{1} = \sqrt{2} - 1$$

よって, 上の不等式は,

$$x < -(\sqrt{2} - 1) \text{ 又は } \sqrt{2} - 1 < x$$

$$x < -\sqrt{2} + 1 \text{ 又は } \sqrt{2} - 1 < x \quad \dots \text{答え}$$

★二重根号

$$\sqrt{(A+B) - 2\sqrt{AB}} = \sqrt{A} - \sqrt{B}$$

(ただし,  $A > B$ )

(3)  $|x - \sqrt{27}| < \sqrt{12}$

$$-2\sqrt{3} < x - 3\sqrt{3} < 2\sqrt{3}$$

$$-2\sqrt{3} + 3\sqrt{3} < x < 2\sqrt{3} + 3\sqrt{3}$$

$$\sqrt{3} < x < 5\sqrt{3} \quad \dots \text{答え}$$

(4)  $|3x + 2| \geq 4$

$$3x + 2 \leq -4 \text{ 又は } 4 \leq 3x + 2$$

$$3x \leq -6 \text{ 又は } 2 \leq 3x$$

$$x \leq -2 \text{ 又は } \frac{2}{3} \leq x \quad \dots \text{答え}$$

(5)  $|x| \leq a$  (ただし  $a$  は実数)

$$\text{答え} \begin{cases} a > 0 \text{ のとき, } & -a \leq x \leq a \\ a = 0 \text{ のとき, } & x = 0 \\ a < 0 \text{ のとき, } & x \text{ は解なし} \end{cases}$$

☆詳細

$a > 0$ ,  $a = 0$ ,  $a < 0$  で場合分けを考えてみる.

$a = 0$  のとき,  $0 \leq x \leq 0$  となって  $x = 0$  のみ.

$a < 0$  のとき,  $|x|$  が 0 以上なため,  
 $|x|$  が負の  $a$  よりも小さいときはない.

ゆえに,  $x$  は解なし.

左ページの前問と比較してほしい.

(6)  $|ax - 1| \geq 3$  (ただし  $a$  は実数)

$$ax - 1 \leq -3 \text{ 又は } 3 \leq ax - 1$$

$$ax \leq -2 \text{ 又は } 4 \leq ax$$

ここで, 「両辺  $\div a$ 」をしたいので, 場合分けをする.

$$\text{答え} \begin{cases} a > 0 \text{ のとき, } & x \leq -\frac{2}{a} \text{ 又は } \frac{4}{a} \leq x \\ a = 0 \text{ のとき, } & x \text{ は解なし} \leftarrow \star \\ a < 0 \text{ のとき, } & x \leq \frac{4}{a} \text{ 又は } -\frac{2}{a} \leq x \end{cases}$$

☆  $a = 0$  のときは解なし

$$\therefore |0x - 1| \geq 3 \Leftrightarrow 1 \geq 3$$

☆不等式と負の操作

不等式で両辺を負の数で割ると不等号は逆転する. 両辺を  $a$  で割る必要があるなら,  $a$  について 3 つの場合分けをする.

$a < 0$  のとき, 答えを  $-\frac{2}{a} \leq x \leq \frac{4}{a}$  としては間違いである. なぜなら,  $a$  は負の数なので,  $-\frac{2}{a}$  は正であり,  $\frac{4}{a}$  は負の数である. 文字式の不等式では, 文字式の正負に気をつかう必要がある.