

反射テスト 絶対値 場合分けによる計算 02

1. 実数の範囲で次の式を計算せよ. 答えは必要とあれば場合分けの形で示せ.

(S 級 1 分 30 秒, A 級 2 分, B 級 3 分, C 級 4 分 20 秒)

(1) $|x^2 - 2x + 1| - |x^2 + 2x + 1|$

(2) $|x| + |y| + x - y$

2. 実数の範囲で次の式を計算せよ. 答えは必要とあれば場合分けの形で示せ.

(S 級 1 分 30 秒, A 級 2 分, B 級 3 分, C 級 4 分 20 秒)

(1) $|x^2 + y^2 + 2xy - 2x - 2y + 1| - (x + y)^2$

(2) $|x| + y + |x - y|$

反射テスト 絶対値 場合分けによる計算 02 解答解説

1. 実数の範囲で次の式を計算せよ. 答えは必要とあれば場合分けの形で示せ.

(S級1分30秒, A級2分, B級3分, C級4分20秒)

★絶対値の入る式の計算

次のように場合分けして考える. ②は①と③に含んで計算する方が簡便.

- ① 絶対値の中が正のときは, そのまま.
- ② 絶対値の中が0のときは, 0.
- ③ 絶対値の中が負のときは, (-1) をかける!

$$|A| \begin{cases} \text{① } A > 0 \text{ のとき, } & |A| = A \\ \text{② } A = 0 \text{ のとき, } & |A| = 0 \\ \text{③ } A < 0 \text{ のとき, } & |A| = -A \end{cases}$$

(1) $|x^2 - 2x + 1| - |x^2 + 2x + 1|$

$$\begin{aligned} &= |(x-1)^2| - |(x+1)^2| \leftarrow \text{因数分解} \\ &= (x-1)^2 - (x+1)^2 \leftarrow \text{☆ポイント参照} \\ &= x^2 - 2x + 1 - (x^2 + 2x + 1) \\ &= -4x \quad \dots\text{答え} \end{aligned}$$

☆ポイント

A が実数の範囲であれば, 次のことが言える.
「 $A^2 \geq 0$. ただし等号成立は $A = 0$ のとき.」

<例>

$$\begin{aligned} x^2 &\geq 0 \\ (x+2)^2 &\geq 0 \\ (a+b+c)^2 &\geq 0 \\ (a-b)^6 &= \{(a-b)^3\}^2 \geq 0 \quad \text{etc.} \end{aligned}$$

(2) $|x| + |y| + x - y$

$$|x| \Rightarrow x \geq 0 \text{ 又は } x \leq 0 \text{ に場合分け}$$

$$|y| \Rightarrow y \geq 0 \text{ 又は } y \leq 0 \text{ に場合分け}$$

以上の場合分けより, 次の4つに場合分けして考える.

$$\begin{cases} \text{① } x \geq 0 \text{ かつ } y \geq 0 \text{ のとき} \\ \text{② } x \geq 0 \text{ かつ } y \leq 0 \text{ のとき} \\ \text{③ } x \leq 0 \text{ かつ } y \geq 0 \text{ のとき} \\ \text{④ } x \leq 0 \text{ かつ } y \leq 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

① $x \geq 0$ かつ $y \geq 0$ のとき,
 $|x| + |y| + x - y = x + y + x - y = 2x$

② $x \geq 0$ かつ $y \leq 0$ のとき,
 $|x| + |y| + x - y = x - y + x - y = 2x - 2y$

③ $x \leq 0$ かつ $y \geq 0$ のとき,
 $|x| + |y| + x - y = -x + y + x - y = 0$

④ $x \leq 0$ かつ $y \leq 0$ のとき,
 $|x| + |y| + x - y = -x - y + x - y = -2y$

$$\text{答え} \begin{cases} 2x & (x \geq 0 \text{ かつ } y \geq 0 \text{ の時}) \\ 2x - 2y & (x \geq 0 \text{ かつ } y < 0 \text{ の時}) \\ 0 & (x < 0 \text{ かつ } y \geq 0 \text{ の時}) \\ -2y & (x < 0 \text{ かつ } y < 0 \text{ の時}) \end{cases}$$

2. 実数の範囲で次の式を計算せよ. 答えは必要とあれば場合分けの形で示せ.

(S級1分30秒, A級2分, B級3分, C級4分20秒)

(1) $|x^2 + y^2 + 2xy - 2x - 2y + 1| - (x + y)^2$

$$\begin{aligned} &= |x^2 + 2xy + y^2 - 2(x + y) + 1| - (x + y)^2 \\ &= |(x + y)^2 - 2(x + y) + 1| - (x + y)^2 \\ &= |(x + y - 1)^2| - (x + y)^2 \\ &= (x + y - 1)^2 - (x + y)^2 \quad \leftarrow 2 \text{乗は} 0 \text{以上} \\ &= \{(x + y - 1) + (x + y)\}\{(x + y - 1) - (x + y)\} \\ &= (2x + 2y - 1) \times (-1) \\ &= -2x - 2y + 1 \quad \cdots \text{答え} \end{aligned}$$

☆ポイント

$A^2 - B^2$ の形は因数分解したほうが計算が早いことがある.

(2) $|x| + y + |x - y|$

$|x| \Rightarrow x \geq 0$ 又は $x \leq 0$ に場合分け

$|x - y| \Rightarrow x - y \geq 0$ 又は $x - y \leq 0$ に場合分け
 $\Leftrightarrow x \geq y$ 又は $x \leq y$ に場合分け

以上の場合分けより, 次の8つに場合分けして考える.

- $$\left\{ \begin{array}{l} \textcircled{1} \quad x \geq 0 \text{ かつ } x \geq y \text{ のとき} \\ \textcircled{2} \quad x \geq 0 \text{ かつ } x \leq y \text{ のとき} \\ \textcircled{3} \quad x \leq 0 \text{ かつ } x \geq y \text{ のとき} \\ \textcircled{4} \quad x \leq 0 \text{ かつ } x \leq y \text{ のとき} \end{array} \right.$$

① $x \geq 0$ かつ $x \geq y$ のとき,
 $|x| + y + |x - y| = x + y + x - y = 2x$

② $x \geq 0$ かつ $x \leq y$ のとき,
 $|x| + y + |x - y| = x + y - (x - y) = 2y$

③ $x \leq 0$ かつ $x \geq y$ のとき,
 $|x| + y + |x - y| = -x + y + x - y = 0$

④ $x \leq 0$ かつ $x \leq y$ のとき,
 $|x| + y + |x - y| = -x + y - (x - y) = -2x + 2y$

$$\text{答え} \left\{ \begin{array}{ll} 2x & (x \geq 0 \text{ かつ } x \geq y \text{ の時}) \\ 2y & (x \geq 0 \text{ かつ } x < y \text{ の時}) \\ 0 & (x < 0 \text{ かつ } x \geq y \text{ の時}) \\ -2x + 2y & (x < 0 \text{ かつ } x < y \text{ の時}) \end{array} \right.$$