

反射テスト 計算 対称式 $x + \frac{1}{x}$ 01

1. 次の式を $x + \frac{1}{x} = t$ として, 次の式を t で表せ. (S級1分, A級2分, B級3分20秒, C級5分)

(1) $x^2 + \frac{1}{x^2}$

(2) $x^3 + \frac{1}{x^3}$

(3) $2x^2 - 5x - \frac{5}{x} + \frac{2}{x^2}$

(4) $x^4 + \frac{1}{x^4}$

2. 次の式を $x + \frac{1}{x} = t$ として, 次の式を t で表せ. (S 級 1 分 40 秒, A 級 3 分, B 級 5 分, C 級 7 分)

(1) $x^2 + \frac{1}{x^2} + 2$

(2) $x^3 + 5x + \frac{5}{x} + \frac{1}{x^3}$

(3) $\frac{x^2}{2} - 3x - \frac{3}{x} + \frac{1}{2x^2}$

(4) $x^5 + \frac{1}{x^5}$

反射テスト 計算 対称式 $x + \frac{1}{x}$ 01 解答解説

1. 次の式を $x + \frac{1}{x} = t$ として、次の式を t で表せ。(S級1分, A級2分, B級3分20秒, C級5分)

★ $x + \frac{1}{x}$

公式 $a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab$ に, $a = x, b = \frac{1}{x}$ を代入して,

$$x^2 + \left(\frac{1}{x}\right)^2 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 \times x \frac{1}{x}$$

★公式 $x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2$

同様にして,

$a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b)$ を用いれば,

★公式 $x^3 + \frac{1}{x^3} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3\left(x + \frac{1}{x}\right)$

(1) $x^2 + \frac{1}{x^2}$

$$= \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2$$

$$= t^2 - 2$$

(2) $x^3 + \frac{1}{x^3}$

$$= \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3\left(x + \frac{1}{x}\right)$$

$$= t^3 - 3t$$

(3) $2x^2 - 5x - \frac{5}{x} + \frac{2}{x^2}$

$$= 2x^2 + \frac{2}{x^2} - 5x - \frac{5}{x}$$

$$= 2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 5\left(x + \frac{1}{x}\right)$$

$$= 2(t^2 - 2) - 5t \quad \leftarrow (1) \text{ の結果より}$$

$$= 2t^2 - 5t - 4$$

(4) $x^4 + \frac{1}{x^4}$

$$= \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 - 2$$

$$= (t^2 - 2)^2 - 2$$

$$= t^4 - 4t^2 + 2$$

2. 次の式を $x + \frac{1}{x} = t$ として, 次の式を t で表せ. (S 級 1 分 40 秒, A 級 3 分, B 級 5 分, C 級 7 分)

(1) $x^2 + \frac{1}{x^2} + 2$

$$= \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 + 2$$

$$= t^2$$

(2) $x^3 + 5x + \frac{5}{x} + \frac{1}{x^3}$

$$= x^3 + \frac{1}{x^3} + 5\left(x + \frac{1}{x}\right)$$

$$= \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3\left(x + \frac{1}{x}\right) + 5t$$

$$= t^3 + 2t$$

(3) $\frac{x^2}{2} - 3x - \frac{3}{x} + \frac{1}{2x^2}$

$$= \frac{1}{2}\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 3\left(x + \frac{1}{x}\right)$$

$$= \frac{1}{2}(t^2 - 2) - 3t$$

$$= \frac{1}{2}t^2 - 3t - 1$$

(4) $x^5 + \frac{1}{x^5}$

次数を考えて, $\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)\left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right)$ を展開してみる.

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)\left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right)$$

$$= x^5 + x + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^5}$$

上の結果より,

$$x^5 + \frac{1}{x^5}$$

$$= \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)\left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) - \left(x + \frac{1}{x}\right)$$

$$= (t^2 - 2)(t^3 - 3t) - t$$

$$= t^5 - 3t^3 - 2t^3 + 6t - t$$

$$= t^5 - 5t^3 + 5t$$