反射テスト　三元交代式　因数分解　02

1.　因数分解せよ.（ S 級 40 秒, A 級 1 分 40 秒, B 級 3 分, C 級 5 分 ）
$(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3$

2. 因数分解せよ.（ S 級 1 分, A 級 3 分 20 秒, B 級 6 分, C 級 10 分 ）
$x^3(y-z)+y^3(z-x)+z^3(x-y)$

反射テスト　三元交代式　因数分解　02　解答解説

1.　因数分解せよ.（S 級 40 秒, A 級 1 分 40 秒, B 級 3 分, C 級 5 分）
$(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3$

★ 三元対称式
文字が三種類（三元）で, その内どの 2 つを入れ替えても, 元の式と同じになるものを三元対称式という.
例　$a^4+b^4+c^4$, $a+b+c+abc$, $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}$, $\cdots$
最も単純な次の対称式を基本対称式という.
基本対称式　$\boldsymbol{a+b+c}$ **(1 次式)**, $\boldsymbol{ab+bc+ca}$ **(2 次式)**, $\boldsymbol{abc}$ **(3 次式)**
★対称式は必ず基本対称式で表すことができる.
★ 公式 1　$\boldsymbol{a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)}$
★ 公式 2　$\boldsymbol{a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)}$
$\Leftrightarrow$　$\boldsymbol{a^3+b^3+c^3=(a+b+c)^3-3(a+b+c)(ab+bc+ca)+3abc}$
公式 2 の下の形は基本対称式で表したもの. 公式としては上の式で覚えておこう.

★ 三元交代式　文字が三種類（三元）で, その内どの 2 つを入れ替えても, 元の式の -1 倍になるものを三元交代式という.
例　$(x-y)(y-z)(z-x)$, $\dfrac{x-y}{z}+\dfrac{y-z}{x}+\dfrac{z-x}{y}$
三元交代式は必ず **基本交代式** $\boldsymbol{(x-y)(y-z)(z-x)}$ で **因数分解** できる.
$\boldsymbol{x,y,z}$ **の三元交代式** $\boldsymbol{=(x-y)(y-z)(z-x)\times(x,y,z}$ **の三元対称式)**
この法則「交代式 $=$ 基本交代式 $\times$ 対称式」は強力である. 覚えておこう.

★因数分解⇒降べきの順に並べる.
a,b,c の対称式・交代式の場合, どれを主人公にしても同じことなので, a について降べきの順に並べてみよう. これでできないことはほとんどない.

解答
$$
\begin{aligned}
&(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3\\
&=(x^3-3x^2y+3xy^2-y^3)+(y^3-3y^2z+3yz^2-z^3)+(z^3-3z^2x+3zx^2-x^3)\\
&=-3x^2y+3xy^2-3y^2z+3yz^2-3z^2x+3zx^2\\
&=-3\left\{x^2(y-z)-x(y^2-z^2)+yz(y-z)\right\}\\
&=-3(y-z)\left\{x^2-x(y+z)+yz\right\}\\
&=-3(y-z)(x-y)(x-z)\\
&=\boldsymbol{3(x-y)(y-z)(z-x)}
\end{aligned}
$$

☆別解

(1) **交代式の性質を用いる.**
与式は **交代式** であるから,
$(x-y)(y-z)(z-x)P(x,y,z)$ の形で因数分解できる.
与式は 3 次式であるから, $P(x,y,z)$ は定数.
$\therefore$　与式 $=c(x-y)(y-z)(z-x)$　$\cdots(A)$
係数を比較 する.
与式の x^2y の係数は -3 であり,
(A) の係数は $-c$ であるから,　$-c=-3$　$\Leftrightarrow$　$c=3$
$\therefore$　与式 $=3(x-y)(y-z)(z-x)$

(2) **公式を用いる.**
与式 $=A^3+B^3+C^3$　←☆
$=(A+B+C)(A^2+B^2+C^2-AB-BC-CA)$
$+3ABC$　←★公式
$=(x-y+y-z+z-x)$
$\times(A^2+B^2+C^2-AB-BC-CA)+3ABC$
$=0(A^2+B^2+C^2-AB-BC-CA)+3ABC$
$=3(x-y)(y-z)(z-x)$

☆ $A=x-y$, $B=y-z$, $C=z-x$

2. 因数分解せよ.（ S 級 1 分, A 級 3 分 20 秒, B 級 6 分, C 級 10 分 ）

$x^3(y-z)+y^3(z-x)+z^3(x-y)$

★ 三元対称式

文字が三種類（三元）で, その内どの 2 つを入れ替えても, 元の式と同じになるものを三元対称式という.

例　$a^4+b^4+c^4$,　$a+b+c+abc$,　$\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}$,　$\cdots$

最も単純な次の対称式を基本対称式という.

基本対称式　$\boldsymbol{a+b+c}$ **(1 次式)**, $\boldsymbol{ab+bc+ca}$ **(2 次式)**, $\boldsymbol{abc}$ **(3 次式)**

★対称式は必ず基本対称式で表すことができる.

★ 公式 1　$\boldsymbol{a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)}$

★ 公式 2　$\boldsymbol{a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)}$

$\Leftrightarrow$　$\boldsymbol{a^3+b^3+c^3=(a+b+c)^3-3(a+b+c)(ab+bc+ca)+3abc}$

公式 2 の下の形は基本対称式で表したもの. 公式としては上の式で覚えておこう.

★ 三元交代式　文字が三種類（三元）で, その内どの 2 つを入れ替えても, 元の式の -1 倍になるものを三元交代式という.

例　$(x-y)(y-z)(z-x)$,　$\dfrac{x-y}{z}+\dfrac{y-z}{x}+\dfrac{z-x}{y}$

三元交代式は必ず **基本交代式** $\boldsymbol{(x-y)(y-z)(z-x)}$ で **因数分解** できる.

$\boldsymbol{x,y,z}$ **の三元交代式** $\boldsymbol{=(x-y)(y-z)(z-x)\times(x,y,z}$ **の三元対称式)**

この法則「交代式 $=$ 基本交代式 $\times$ 対称式」は強力である. 覚えておこう.

★因数分解⇒降べきの順に並べる.

a,b,c の対称式・交代式の場合, どれを主人公にしても同じことなので, a について降べきの順に並べてみよう. これでできないことはほとんどない.

解答

$$
\begin{aligned}
&x^3(y-z)+y^3(z-x)+z^3(x-y)\\
&=x^3(y-z)-x(y^3-z^3)+yz(y^2-z^2)\\
&=x^3(y-z)-x(y-z)(y^2+yz+z^2)+yz(y-z)(y+z)\\
&=(y-z)\left\{x^3-x(y^2+yz+z^2)+yz(y+z)\right\}\\
&=(y-z)\left\{x^3-x(y^2+2yz+z^2)+yz(x+y+z)\right\}\\
&=(y-z)\left[x\left\{x^2-(y+z)^2\right\}+yz(x+y+z)\right]\\
&=(y-z)\left[x\left\{x+(y+z)\right\}\left\{x-(y+z)\right\}+yz(x+y+z)\right]\\
&=(y-z)\left\{x(x+y+z)(x-y-z)+yz(x+y+z)\right\}\\
&=(y-z)(x+y+z)\left\{x(x-y-z)+yz\right\}\\
&=(y-z)(x+y+z)\left\{x^2-x(y+z)+yz\right\}\\
&=(y-z)(x+y+z)(x-y)(x-z)\\
&=\boldsymbol{-(x-y)(y-z)(z-x)(x+y+z)}
\end{aligned}
$$

☆別解 **交代式の性質を用いる.**

与式は **交代式** であるから, $(x-y)(y-z)(z-x)P(x,y,z)$ の形で因数分解できる.

与式は 4 次式であるから, $P(x,y,z)$ は 1 次対称式.　　←☆ 1 次の対称式は基本対称式 $+$ 定数だけ.

$\Rightarrow$　$P(x,y,z)=c(x+y+z+d)$ と表せる.

$\therefore$　与式 $=c(x-y)(y-z)(z-x)(x+y+z+d)$　$\cdots(A)$

係数を比較 する.

与式の x^3y の係数は 1 で, 3 次の項はない.

(A) の x^3y の係数は $-c$ であるから,　$-c=1$　$\Leftrightarrow$　$c=-1$

また, 3 次の項はないので,　$d=0$

$\therefore$　与式 $=-(x-y)(y-z)(z-x)(x+y+z)$