反射テスト　三元交代式　因数分解　01

1.　因数分解せよ.（ S 級 40 秒, A 級 1 分 30 秒, B 級 3 分, C 級 5 分 ）
$x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)$

2. 因数分解せよ.（ S 級 40 秒, A 級 1 分 30 秒, B 級 3 分, C 級 5 分 ）

$bc(b-c)+ca(c-a)+ab(a-b)$

反射テスト　三元交代式　因数分解　01　解答解説

1.　因数分解せよ.（ S 級 40 秒, A 級 1 分 30 秒, B 級 3 分, C 級 5 分 ）
$x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)$

★ 三元対称式
文字が三種類（三元）で, その内どの 2 つを入れ替えても, 元の式と同じになるものを三元対称式という.
例　$a^4+b^4+c^4$,　$a+b+c+abc$,　$\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}$,　$\cdots$
最も単純な次の対称式を基本対称式という.
基本対称式　$a+b+c$ (1 次式), $ab+bc+ca$ (2 次式), abc (3 次式)
★対称式は必ず基本対称式で表すことができる.
★ 公式 1　$a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$
★ 公式 2　$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$
$\Leftrightarrow$　$a^3+b^3+c^3=(a+b+c)^3-3(a+b+c)(ab+bc+ca)+3abc$
公式 2 の下の形は基本対称式で表したもの. 公式としては上の式で覚えておこう.

★ 三元交代式　文字が三種類（三元）で, その内どの 2 つを入れ替えても, 元の式の -1 倍になるものを三元交代式という.
例　$(x-y)(y-z)(z-x)$,　$\dfrac{x-y}{z}+\dfrac{y-z}{x}+\dfrac{z-x}{y}$
三元交代式は必ず **基本交代式 $(x-y)(y-z)(z-x)$** で **因数分解** できる.
x, y, z の三元交代式 $=(x-y)(y-z)(z-x)\times(x, y, z$ の三元対称式$)$
この法則「交代式 = 基本交代式 × 対称式」は強力である. 覚えておこう.

★因数分解⇒降べきの順に並べる.
a, b, c の対称式・交代式の場合, どれを主人公にしても同じことなので, a について降べきの順に並べてみよう. これでできないことはほとんどない.

解答
$x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)$
$=x^2(y-z)-x(y^2-z^2)+yz(y-z)$　←★何はともあれ降べきの順に並べる.
$=x^2(y-z)-x(y+z)(y-z)+yz(y-z)$
$=(y-z)\left\{x^2-x(y+z)+yz\right\}$
$=(y-z)(x-y)(x-z)$
$=\boldsymbol{-(x-y)(y-z)(z-x)}$

☆別解 **交代式の性質を用いる.**
与式は **交代式** であるから,
$(x-y)(y-z)(z-x)P(x, y, z)$ の形で因数分解できる.
与式は 3 次式であるから, $P(x, y, z)$ は定数.
$\therefore$　与式 $=c(x-y)(y-z)(z-x)$　$\cdots(A)$
係数を比較 する.
与式の x^3y の係数は 1 であり,
(A) の係数は $-c$ であるから,　$-c=1$　$\Leftrightarrow$　$c=-1$
$\therefore$　与式 $=-(x-y)(y-z)(z-x)$

2. 因数分解せよ.（ S 級 40 秒, A 級 1 分 30 秒, B 級 3 分, C 級 5 分 ）

$bc(b-c)+ca(c-a)+ab(a-b)$

★ 三元対称式

文字が三種類（三元）で, その内どの 2 つを入れ替えても, 元の式と同じになるものを三元対称式という.

例 $a^4+b^4+c^4$, $a+b+c+abc$, $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}$, $\cdots$

最も単純な次の対称式を基本対称式という.

基本対称式 $\boldsymbol{a+b+c}$ **(1 次式), $\boldsymbol{ab+bc+ca}$ (2 次式), $\boldsymbol{abc}$ (3 次式)**

★対称式は必ず基本対称式で表すことができる.

★ 公式 1 $\boldsymbol{a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)}$

★ 公式 2 $\boldsymbol{a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)}$

$\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{a^3+b^3+c^3=(a+b+c)^3-3(a+b+c)(ab+bc+ca)+3abc}$

公式 2 の下の形は基本対称式で表したもの. 公式としては上の式で覚えておこう.

★ 三元交代式 文字が三種類（三元）で, その内どの 2 つを入れ替えても, 元の式の -1 倍になるものを三元交代式という.

例 $(x-y)(y-z)(z-x)$, $\dfrac{x-y}{z}+\dfrac{y-z}{x}+\dfrac{z-x}{y}$

三元交代式は必ず **基本交代式 $\boldsymbol{(x-y)(y-z)(z-x)}$** で **因数分解** できる.

$\boldsymbol{x,y,z}$ の三元交代式 $\boldsymbol{=(x-y)(y-z)(z-x)\times(x,y,z}$ の三元対称式$\boldsymbol{)}$

この法則「交代式 = 基本交代式 × 対称式」は強力である. 覚えておこう.

★因数分解⇒降べきの順に並べる.

a,b,c の対称式・交代式の場合, どれを主人公にしても同じことなので, a について降べきの順に並べてみよう. これでできないことはほとんどない.

解答

$bc(b-c)+ca(c-a)+ab(a-b)$

$=a^2(b-c)-a(b^2-c^2)+bc(b-c)$ ←★何はともあれ降べきの順に並べる.

$=a^2(b-c)-a(b+c)(b-c)+bc(b-c)$

$=(b-c)\left\{a^2-a(b+c)+bc\right\}$

$=(b-c)(a-b)(a-c)$

$=\boldsymbol{-(a-b)(b-c)(c-a)}$

☆別解 **交代式の性質を用いる.**

与式は **交代式** であるから,

$(a-b)(b-c)(c-a)P(a,b,c)$ の形で因数分解できる.

与式は 3 次式であるから, $P(a,b,c)$ は定数.

$\therefore$ 与式 $=k(a-b)(b-c)(c-a)$ $\cdots(A)$

係数を比較 する.

与式の x^3y の係数は 1 であり,

(A) の係数は $-k$ であるから, $-k=1$ $\Leftrightarrow$ $k=-1$

$\therefore$ 与式 $=-(x-y)(y-z)(z-x)$