

反射テスト 三元対称式・交代式の判定 01

1. a, b, c の内どの 2 つを入れ替えても、元の式と同じになるものを対称式、元の式の -1 倍になるものを交代式という。
次の式が対称式か交代式か判断せよ。対称式なら S 、交代式なら A 、他は \times と記すこと。

(S 級 25 秒, A 級 45 秒, B 級 2 分, C 級 3 分)

(1) $a + b + c$

(2) $a - b + c$

(3) $(a - b)(b - c)(c - a)$

(4) $(a - 1)(b - 1)(c - 1)$

(5) $\frac{a - b}{c} + \frac{b - c}{a} + \frac{c - a}{b}$

(6) $(a - b)^2(b - c)^2(c - a)^2$

2. a, b, c の内どの 2 つを入れ替えても, 元の式と同じになるものを対称式, 元の式の -1 倍になるものを交代式という.
次の式が対称式か交代式か判断せよ. 対称式なら S , 交代式なら A , 他は \times と記すこと.

(S 級 30 秒, A 級 50 秒, B 級 2 分, C 級 3 分)

(1) $(-a + b + c)(a - b + c)(a + b - c)$

(2) $(a + b)(b + c)(c + a)$

(3) $(a - b)(a - c)$

(4) $c^2(a - b) + a^2(b - c) + b^2(c - a)$

(5) $c(a - b)^2 + a(b - c)^2 + b(c - a)^2$

(6) $\frac{a - b}{bc} + \frac{b - c}{ca} + \frac{c - a}{ab}$

反射テスト 三元対称式・交代式の判定 01 解答解説

1. a, b, c の内どの 2 つを入れ替えても、元の式と同じになるものを対称式、元の式の -1 倍になるものを交代式という。
次の式が対称式か交代式か判断せよ。対称式なら S 、交代式なら A 、他は \times と記すこと。

(S 級 25 秒, A 級 45 秒, B 級 2 分, C 級 3 分)

★三元対称式

文字が三種類 (三元) で、その内どの 2 つを入れ替えても、元の式と同じになるものを三元対称式という。

例 $a^4 + b^4 + c^4$, $a + b + c + abc$, $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$, ...

最も単純な次の対称式を基本対称式という。

基本対称式 $a + b + c$ (1 次式), $ab + bc + ca$ (2 次式), abc (3 次式)

★対称式は必ず基本対称式で表すことができる。

★公式 1 $a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ca)$

★公式 2 $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$

$\Leftrightarrow a^3 + b^3 + c^3 = (a + b + c)^3 - 3(a + b + c)(ab + bc + ca) + 3abc$

★三元交代式 文字が三種類 (三元) で、どの 2 つを入れ替えても、元の式の -1 倍になるものを三元交代式という。

例 $(x - y)(y - z)(z - x)$, $x(y - z) + y(z - x) + z(x - y)$, ...

交代式は必ず **基本交代式** $(x - y)(y - z)(z - x)$ で **因数分解** できる。

$(x, y, z \text{ の三元交代式}) = (x - y)(y - z)(z - x) \times (x, y, z \text{ の三元対称式})$

この法則「交代式 = 基本交代式 \times 対称式」は強力である。覚えておこう。

(1) $a + b + c$

a と b の入れ替え $b + a + c$

b と c の入れ替え $a + c + b$

c と a の入れ替え $c + b + a$

対称式 $\Rightarrow S$.

(2) $a - b + c$

a と b の入れ替え $b - a + c$

どちらもでない $\Rightarrow \times$.

(3) $(a - b)(b - c)(c - a)$

a と b の入れ替え

$(b - a)(a - c)(c - b)$

$= \{-(a - b)\} \{-(c - a)\} \{-(b - c)\}$

$= -(a - b)(c - a)(b - c)$

b と c の入れ替え 同様.

c と a の入れ替え 同様.

交代式 $\Rightarrow A$.

(4) $(a - 1)(b - 1)(c - 1)$

a と b の入れ替え

$(b - 1)(a - 1)(c - 1)$

b と c の入れ替え 同様.

c と a の入れ替え 同様.

対称式 $\Rightarrow S$.

(5) $\frac{a - b}{c} + \frac{b - c}{a} + \frac{c - a}{b}$

a と b の入れ替え

$\frac{b - a}{c} + \frac{a - c}{b} + \frac{c - b}{a}$

$= -\frac{a - b}{c} - \frac{c - a}{b} - \frac{b - c}{a}$

$= -\left(\frac{a - b}{c} + \frac{b - c}{a} + \frac{c - a}{b}\right)$

b と c の入れ替え 同様.

c と a の入れ替え 同様.

交代式 $\Rightarrow A$.

(6) $(a - b)^2(b - c)^2(c - a)^2$

a と b の入れ替え

$(b - a)^2(a - c)^2(c - b)^2$

$= (a - b)^2(c - a)^2(b - c)^2$

b と c の入れ替え 同様.

c と a の入れ替え 同様.

対称式 $\Rightarrow S$.

☆交代式の 2 乗は対称式.

2. a, b, c の内どの 2 つを入れ替えても、元の式と同じになるものを対称式、元の式の -1 倍になるものを交代式という。
 次の式が対称式か交代式か判断せよ。対称式なら S 、交代式なら A 、他は \times と記すこと。

(S 級 30 秒, A 級 50 秒, B 級 2 分, C 級 3 分)

(1) $(-a + b + c)(a - b + c)(a + b - c)$

a と b の入れ替え

$$\begin{aligned} & (-b + a + c)(b - a + c)(b + a - c) \\ & = (a - b + c)(-a + b + c)(a + b - c) \end{aligned}$$

b と c の入れ替え 同様.

c と a の入れ替え 同様.

対称式 $\Rightarrow S$.

(2) $(a + b)(b + c)(c + a)$

a と b の入れ替え $(b + a)(a + c)(c + b)$

b と c の入れ替え $(a + c)(c + b)(b + a)$

c と a の入れ替え $(c + b)(b + a)(a + c)$

対称式 $\Rightarrow S$.

(3) $(a - b)(a - c)$

a と b の入れ替え $(b - a)(b - c)$

どちらでもない $\Rightarrow \times$.

(4) $c^2(a - b) + a^2(b - c) + b^2(c - a)$

a と b の入れ替え

$$\begin{aligned} & c^2(b - a) + b^2(a - c) + a^2(c - b) \\ & = -c^2(a - b) - b^2(c - a) - a^2(b - c) \\ & = -\{c^2(a - b) + a^2(b - c) + b^2(c - a)\} \end{aligned}$$

b と c の入れ替え 同様.

c と a の入れ替え 同様.

交代式 $\Rightarrow A$.

(5) $c(a - b)^2 + a(b - c)^2 + b(c - a)^2$

a と b の入れ替え

$$\begin{aligned} & c(b - a)^2 + b(a - c)^2 + a(c - b)^2 \\ & = c(a - b)^2 + b(c - a)^2 + a(b - c)^2 \end{aligned}$$

b と c の入れ替え 同様.

c と a の入れ替え 同様.

対称式 $\Rightarrow S$.

☆交代式の 2 乗は対称式.

(6) $\frac{a - b}{bc} + \frac{b - c}{ca} + \frac{c - a}{ab}$

$$= \frac{a(a - b) + b(b - c) + c(c - a)}{abc}$$

$$= \frac{a^2 + b^2 + c^2 - (ab + bc + ca)}{abc}$$

対称式 $\Rightarrow S$.

☆注意 交代式っぽい対称式.

前ページの 1(5) と比較してみよう.