

反射テスト 三元対称式 因数分解 03 難

1. 次の式を因数分解せよ。ただし自信があれば、これをとばして次のページへ。(S級2分30秒, A級5分, B級7分, C級10分)

$$a^4 - 2(b^2 - c^2)a^2 + (b^2 - c^2)^2 - 4c^2a^2$$

2. 次の式を因数分解せよ. (S 級 3 分, A 級 6 分, B 級 8 分, C 級 12 分)

$$a^4 + b^4 + c^4 - 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)$$

反射テスト 三元対称式 因数分解 03 難 解答解説

1. 次の式を因数分解せよ。ただし自信があれば、これをとばして次のページへ。(S級2分30秒, A級5分, B級7分, C級10分)

$$a^4 - 2(b^2 - c^2)a^2 + (b^2 - c^2)^2 - 4c^2a^2$$

★三元対称式

文字が三種類(三元)で、その内どの2つを入れ替えても、元の式と同じになるものを三元対称式という。

例 $a^4 + b^4 + c^4$, $a + b + c + abc$, $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$, ...

最も単純な次の対称式を基本対称式という。

基本対称式 $a + b + c$ (1次式), $ab + bc + ca$ (2次式), abc (3次式)

★対称式は必ず基本対称式で表すことができる。

★公式1 $a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ca)$

★公式2 $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$

$\Leftrightarrow a^3 + b^3 + c^3 = (a + b + c)^3 - 3(a + b + c)(ab + bc + ca) + 3abc$

公式2の下のは基本対称式で表したもの。公式としては上の式で覚えておこう。

★因数分解⇒降べきの順に並べる。

a, b, c の対称式の場合、どれを主人公にしても同じことなので、 a について降べきの順に並べてみよう。これでできないことはほとんどない。

$$\begin{aligned} \text{与式} &= \{a^4 - 2(b^2 - c^2)a^2 + (b^2 - c^2)^2\} - (2ca)^2 \\ &= \{a^2 - (b^2 - c^2)\}^2 - (2ca)^2 \\ &= \{a^2 - (b^2 - c^2) + 2ca\} \{a^2 - (b^2 - c^2) - 2ca\} \\ &= (a^2 + 2ca + c^2 - b^2)(a^2 - 2ca + c^2 - b^2) \\ &= \{(a + c)^2 - b^2\} \{(a - c)^2 - b^2\} \\ &= \{(a + c)^2 - b^2\} \{(a - c)^2 - b^2\} \\ &= (a + c + b)(a + c - b)(a - c + b)(a - c - b) \\ &= -(a + b + c)(-a + b + c)(a - b + c)(a + b - c) \\ &= (a + b + c)(a - b - c)(-a + b - c)(-a - b + c) \end{aligned}$$

2. 次の式を因数分解せよ。(S級3分, A級6分, B級8分, C級12分)

$$a^4 + b^4 + c^4 - 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)$$

★三元対称式

文字が三種類(三元)で, その内どの2つを入れ替えても, 元の式と同じになるものを三元対称式という.

例 $a^4 + b^4 + c^4$, $a + b + c + abc$, $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$, ...

最も単純な次の対称式を基本対称式という.

基本対称式 $a + b + c$ (1次式), $ab + bc + ca$ (2次式), abc (3次式)

★対称式は必ず基本対称式で表すことができる.

★公式1 $a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ca)$

★公式2 $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$

$\Leftrightarrow a^3 + b^3 + c^3 = (a + b + c)^3 - 3(a + b + c)(ab + bc + ca) + 3abc$

公式2の下形の形は基本対称式で表したものの. 公式としては上の式で覚えておこう.

★因数分解⇒降べきの順に並べる.

a, b, c の対称式の場合, どれを主人公にしても同じことなので, a について降べきの順に並べてみよう. これのできないことはほとんどない.

与式 $= a^4 - 2(b^2 + c^2)a^2 + (b^4 - 2b^2c^2 + c^4)$ ←★降べきの順

$$= a^4 - 2(b^2 - c^2 + c^2 + c^2)a^2 + (b^2 - c^2)^2$$

$$= a^4 - 2(b^2 - c^2 + 2c^2)a^2 + (b^2 - c^2)^2$$

$$= a^4 - 2(b^2 - c^2)a^2 + (b^2 - c^2)^2 - 4c^2a^2$$
 ←☆ここから前問に合流

$$= \{a^2 - (b^2 - c^2)\}^2 - (2ca)^2$$

$$= \{a^2 - (b^2 - c^2) + 2ca\} \{a^2 - (b^2 - c^2) - 2ca\}$$

$$= (a^2 + 2ca + c^2 - b^2)(a^2 - 2ca + c^2 - b^2)$$

$$= \{(a + c)^2 - b^2\} \{(a - c)^2 - b^2\}$$

$$= \{(a + c)^2 - b^2\} \{(a - c)^2 - b^2\}$$

$$= (a + c + b)(a + c - b)(a - c + b)(a - c - b)$$

$$= -(a + b + c)(-a + b + c)(a - b + c)(a + b - c)$$

$$= (a + b + c)(a - b - c)(-a + b - c)(-a - b + c)$$

★降べきの順に並べる.

たとえ因数分解できなくても, これだけはすること.