反射テスト　三元対称式　因数分解　02

1.　次の式を因数分解せよ.（ S 級 55 秒, A 級 2 分, B 級 5 分, C 級 8 分 ）
$(a+b)(b+c)(c+a)+abc$

2. 次の式を因数分解せよ.（ S 級 1 分 36 秒, A 級 3 分, B 級 6 分 30 秒, C 級 10 分 ）
$a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+3abc$

反射テスト　三元対称式　因数分解　02　解答解説

1.　次の式を因数分解せよ．(S 級 55 秒，A 級 2 分，B 級 5 分，C 級 8 分)
$(a+b)(b+c)(c+a)+abc$

★ 三元対称式
文字が三種類（三元）で，その内どの 2 つを入れ替えても，元の式と同じになるものを三元対称式という．
例　$a^4+b^4+c^4$ ，$a+b+c+abc$ ，$\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}$ ，$\cdots$

最も単純な次の対称式を基本対称式という．
基本対称式　$\boldsymbol{a+b+c}$ **(1 次式)**，$\boldsymbol{ab+bc+ca}$ **(2 次式)**，$\boldsymbol{abc}$ **(3 次式)**

★対称式は必ず基本対称式で表すことができる．
★ 公式 1　$\boldsymbol{a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)}$
★ 公式 2　$\boldsymbol{a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)}$
$\Leftrightarrow$　$\boldsymbol{a^3+b^3+c^3=(a+b+c)^3-3(a+b+c)(ab+bc+ca)+3abc}$
公式 2 の下の形は基本対称式で表したもの. 公式としては上の式で覚えておこう．

★因数分解⇒降べきの順に並べる．
a, b, c の対称式の場合，どれを主人公にしても同じことなので，a について降べきの順に並べてみよう．これでできないことはほとんどない．

$(a+b)(b+c)(c+a)+abc$

$=a^2(b+c)+a(b^2+3bc+c^2)+bc(b+c)$　←★降べきの順

$$\begin{array}{ccccc} 1 & \times & (b+c) & \longrightarrow & b^2+2bc+c^2 \\ (b+c) & & bc & \longrightarrow & bc \\ \hline & & & & b^2+3bc+c^2 \end{array}$$

与式 $=\{a+(b+c)\}\{(b+c)a+bc\}$

$=\boldsymbol{(a+b+c)(ab+bc+ca)}$

☆別解　対称式であるから，$A=a+b+c$ とおくと早く簡単にできることがある．
次のページではこの解法でも是非チャレンジしてみるべし．

与式 $=(A-c)(A-a)(A-b)+abc$　←☆ $A=a+b+c$
$=A^3-(a+b+c)A^2+(ab+bc+ca)A-abc+abc$
$=A^3-A\cdot A^2+(ab+bc+ca)A$
$=\boldsymbol{(a+b+c)(ab+bc+ca)}$

2.　次の式を因数分解せよ．(S 級 1 分 36 秒，A 級 3 分，B 級 6 分 30 秒，C 級 10 分)
$a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+3abc$

★ 三元対称式
　文字が三種類（三元）で，その内どの 2 つを入れ替えても，元の式と同じになるものを三元対称式という．
例　$a^4+b^4+c^4$ ，$a+b+c+abc$ ，$\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}$ ，$\cdots$

最も単純な次の対称式を基本対称式という．
　基本対称式　$\boldsymbol{a+b+c}$ **(1 次式)**，$\boldsymbol{ab+bc+ca}$ **(2 次式)**，$\boldsymbol{abc}$ **(3 次式)**

★対称式は必ず基本対称式で表すことができる．
　★ 公式 1　$\boldsymbol{a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)}$
　★ 公式 2　$\boldsymbol{a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)}$
　　　$\Leftrightarrow$　$\boldsymbol{a^3+b^3+c^3=(a+b+c)^3-3(a+b+c)(ab+bc+ca)+3abc}$
公式 2 の下の形は基本対称式で表したもの．公式としては上の式で覚えておこう．

★因数分解⇒降べきの順に並べる．
a, b, c の対称式の場合，どれを主人公にしても同じことなので，a について降べきの順に並べてみよう．これでできないことはほとんどない．

$a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+3abc$

$=a^2(b+c)+a(b^2+3bc+c^2)+bc(b+c)$　←★降べきの順

$$\begin{array}{ccccc} 1 & & (b+c) & \longrightarrow & b^2+2bc+c^2 \\ (b+c) & \times & bc & \longrightarrow & bc \\ \hline & & & & b^2+3bc+c^2 \end{array}$$

与式 $=\{a+(b+c)\}\{(b+c)a+bc\}$

　　$=\boldsymbol{(a+b+c)(ab+bc+ca)}$

☆別解　対称式であるから，$A=a+b+c$ とおくと早く簡単にできることがある．

与式 $=a^2(A-a)+b^2(A-b)+c^2(A-c)+3abc$　←☆ $A=a+b+c$
　　$=A(a^2+b^2+c^2)-(a^3+b^3+c^3-3abc)$
　　$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)-(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$　←★公式 2
　　$=(a+b+c)\left\{(a^2+b^2+c^2)-(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)\right\}$
　　$=\boldsymbol{(a+b+c)(ab+bc+ca)}$