

反射テスト 三元対称式 因数分解 01

1. 次の式を因数分解せよ。(S級1分45秒, A級2分40秒, B級4分, C級6分)

(1) $a(b^2 + c^2) + b(c^2 + a^2) + c(a^2 + b^2) + 2abc$

(2) $(x + y + z) + (xy + yz + zx) + xyz + 1$

2. 次の式を因数分解せよ. (S 級 1 分 55 秒, A 級 2 分 50 秒, B 級 4 分 20 秒, C 級 7 分)

(1) $a(b+c)^2 + b(c+a)^2 + c(a+b)^2 - 4abc$

(2) $xyz - (xy + yz + zx) + (x + y + z) - 1$

反射テスト 三元対称式 因数分解 01 解答解説

1. 次の式を因数分解せよ。(S級1分45秒, A級2分40秒, B級4分, C級6分)

★三元対称式

文字が三種類(三元)で, その内どの2つを入れ替えても, 元の式と同じになるものを三元対称式という.

例 $a^4 + b^4 + c^4$, $a + b + c + abc$, $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$, ...

最も単純な次の対称式を基本対称式という.

基本対称式 $a + b + c$ (1次式), $ab + bc + ca$ (2次式), abc (3次式)

★対称式は必ず基本対称式で表すことができる.

★公式1 $a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ca)$

★公式2 $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$

$\Leftrightarrow a^3 + b^3 + c^3 = (a + b + c)^3 - 3(a + b + c)(ab + bc + ca) + 3abc$

公式2の下のは基本対称式で表したもの. 公式としては上の式で覚えておこう.

★因数分解⇒降べきの順に並べる.

a, b, c の対称式の場合, どれを主人公にしても同じことなので, a について降べきの順に並べてみよう. これのできないことはほとんどない.

(1) $a(b^2 + c^2) + b(c^2 + a^2) + c(a^2 + b^2) + 2abc$

$$\begin{aligned} &= a(b^2 + c^2) + bc^2 + a^2b + ca^2 + b^2c + 2abc \\ &= a^2(b + c) + a(b^2 + 2bc + c^2) + b^2c + bc^2 \\ &= a^2(b + c) + a(b^2 + 2bc + c^2) + bc(b + c) \quad \leftarrow \star \\ &= a^2(b + c) + a(b + c)^2 + bc(b + c) \\ &= (b + c) \{a^2 + a(b + c) + bc\} \\ &= (a + b)(b + c)(c + a) \end{aligned}$$

★降べきの順に並べる.

たとえ因数分解できなくても, これだけはすること.

(2) $(x + y + z) + (xy + yz + zx) + xyz + 1$

$$\begin{aligned} &= xyz + xy + zx + x + yz + y + z + 1 \quad \leftarrow \star \\ &= x(yz + y + z + 1) + (yz + y + z + 1) \\ &= (x + 1)(yz + y + z + 1) \\ &= (x + 1)(y + 1)(z + 1) \end{aligned}$$

★降べきの順に並べる.

たとえ因数分解できなくても, これだけはすること.

2. 次の式を因数分解せよ。(S級1分55秒, A級2分50秒, B級4分20秒, C級7分)

$$\begin{aligned}(1) \quad & a(b+c)^2 + b(c+a)^2 + c(a+b)^2 - 4abc \\ &= a(b^2 + 2bc + c^2) + b(c^2 + 2ca + a^2) + c(a^2 + 2ab + b^2) - 4abc \\ &= a^2(b+c) + a\{(b^2 + 2bc + c^2) + 2bc + 2bc - 4bc\} + bc^2 + b^2c \quad \leftarrow \star \\ &= a^2(b+c) + a(b^2 + 2bc + c^2 + 2bc + 2bc - 4bc) + bc(b+c) \\ &= a^2(b+c) + a(b+c)^2 + bc(b+c) \\ &= (b+c)\{a^2 + a(b+c) + bc\} \\ &= (b+c)(a+b)(a+c) \\ &= (a+b)(b+c)(c+a)\end{aligned}$$

★ 降べきの順に並べる.

たとえ因数分解できなくても、これだけはすること.

☆実は前ページの(1)と同じ.

$$\begin{aligned}(2) \quad & xyz - (xy + yz + zx) + (x + y + z) - 1 \\ &= xyz - xy - yz - zx + x + y + z - 1 \quad \leftarrow \star \\ &= x\{yz - (y+z) + 1\} - (yz - y - z + 1) \\ &= x(y-1)(z-1) - (y-1)(z-1) \\ &= (x-1)(y-1)(z-1)\end{aligned}$$

★ 降べきの順に並べる.

たとえ因数分解できなくても、これだけはすること.