反射テスト　三元対称式　計算　01

1.　$a+b+c=0$, $ab+bc+ca=-10$, $abc=-4\sqrt{3}$ のとき, 次の計算をせよ.

（ S 級 55 秒, A 級 2 分, B 級 4 分, C 級 6 分 ）

(1)　$\dfrac{1}{ab}+\dfrac{1}{bc}+\dfrac{1}{ca}$

(2)　$a^2+b^2+c^2$

(3)　$a^3+b^3+c^3$

2. $a+b+c=2\sqrt{3}$, $ab+bc+ca=-12$, $abc=-3\sqrt{6}$ のとき, 次の計算をせよ.

（ S 級 1 分 10 秒, A 級 2 分 20 秒, B 級 4 分, C 級 6 分 ）

(1) $\dfrac{1}{ab}+\dfrac{1}{bc}+\dfrac{1}{ca}$

(2) $a^2+b^2+c^2$

(3) $a^3+b^3+c^3$

反射テスト　三元対称式　計算　01　解答解説

1.　$a+b+c=0$，$ab+bc+ca=-10$, $abc=-4\sqrt{3}$ のとき，次の計算をせよ．

（ S 級 55 秒, A 級 2 分, B 級 4 分, C 級 6 分 ）

★ 三元対称式

文字が三種類（三元）で，その内どの 2 つを入れ替えても，元の式と同じになるものを三元対称式という．

例　$a^4+b^4+c^4$ ，$a+b+c+abc$ ，$\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}$ ，$\cdots$

最も単純な次の対称式を基本対称式という．

基本対称式　$\boldsymbol{a+b+c}$ **(1 次式)**，$\boldsymbol{ab+bc+ca}$ **(2 次式)**，$\boldsymbol{abc}$ **(3 次式)**

★対称式は必ず基本対称式で表すことができる．

★ 公式 1　$\boldsymbol{a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)}$

★ 公式 2　$\boldsymbol{a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)}$

$\Leftrightarrow$　$\boldsymbol{a^3+b^3+c^3=(a+b+c)^3-3(a+b+c)(ab+bc+ca)+3abc}$

公式 2 の下の形は基本対称式で表したもの．公式としては上の式で覚えておこう．

(1)　$\dfrac{1}{ab}+\dfrac{1}{bc}+\dfrac{1}{ca}$

$=\dfrac{c}{abc}+\dfrac{a}{abc}+\dfrac{b}{abc}$　←通分

$=\dfrac{a+b+c}{abc}$

$=\dfrac{0}{-4\sqrt{3}}=\boldsymbol{0}$

(2)　$a^2+b^2+c^2$

$=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$　←★公式 1

$=0^2-2\times(-10)$

$=\boldsymbol{20}$

(3)　$a^3+b^3+c^3$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc$　←★公式 2

$=0(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3\times(-4\sqrt{3})$

$=\boldsymbol{-12\sqrt{3}}$

2. $a+b+c=2\sqrt{3}$, $ab+bc+ca=-12$, $abc=-3\sqrt{6}$ のとき，次の計算をせよ．

（S 級 1 分 10 秒，A 級 2 分 20 秒，B 級 4 分，C 級 6 分）

★ 三元対称式

文字が三種類（三元）で，その内どの 2 つを入れ替えても，元の式と同じになるものを三元対称式という．

例　$a^4+b^4+c^4$，$a+b+c+abc$，$\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}$，$\cdots$

最も単純な次の対称式を基本対称式という．

基本対称式　$\boldsymbol{a+b+c}$ **(1 次式)，**$\boldsymbol{ab+bc+ca}$ **(2 次式)，**$\boldsymbol{abc}$ **(3 次式)**

★対称式は必ず基本対称式で表すことができる．

★ 公式 1　$\boldsymbol{a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)}$

★ 公式 2　$\boldsymbol{a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)}$

$\Leftrightarrow$　$\boldsymbol{a^3+b^3+c^3=(a+b+c)^3-3(a+b+c)(ab+bc+ca)+3abc}$

公式 2 の下の形は基本対称式で表したもの．公式としては上の式で覚えておこう．

(1)　$\dfrac{1}{ab}+\dfrac{1}{bc}+\dfrac{1}{ca}$

$=\dfrac{c}{abc}+\dfrac{a}{abc}+\dfrac{b}{abc}$　←通分

$=\dfrac{a+b+c}{abc}$

$=\dfrac{2\sqrt{3}}{-3\sqrt{6}}=\boldsymbol{-\dfrac{\sqrt{2}}{3}}$

(2)　$a^2+b^2+c^2$

$=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$　←★公式 1

$=(2\sqrt{3})^2-2\times(-12)$

$=12+24=\mathbf{36}$

(3)　$a^3+b^3+c^3$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc$　←★公式 2

$=2\sqrt{3}\,\{36-(-12)\}+3\times(-3\sqrt{6})$　←☆ (2) の結果を用いた

$=\boldsymbol{96\sqrt{3}-9\sqrt{6}}$