反射テスト　三元対称式　01

1.　次の式を基本対称式 $a+b+c,\ ab+bc+ca,\ abc$ を用いて表せ.（ S 級 1 分 50 秒, A 級 2 分 30 秒, B 級 4 分, C 級 6 分 ）

(1)　$a^2+ab+b^2+bc+c^2+ca$

(2)　$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}$

(3)　$a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+c^2a+ca^2+3abc$

(4)　$(a+b)(b+c)(c+a)$

2. 次の式を基本対称式 $a+b+c,\ ab+bc+ca,\ abc$ を用いて表せ.（ S 級 2 分 40 秒, A 級 4 分, B 級 6 分, C 級 8 分 ）

(1) $(a+b-c)a+(b+c-a)b+(c+a-b)c$

(2) $\dfrac{c}{ab}+\dfrac{a}{bc}+\dfrac{b}{ca}$

(3) $a^3+b^3+c^3$

(4) $(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)$

反射テスト　三元対称式　01　解答解説

1.　次の式を基本対称式 $a+b+c,\ ab+bc+ca,\ abc$ を用いて表せ.（S 級 1 分 50 秒, A 級 2 分 30 秒, B 級 4 分, C 級 6 分）

★ 三元対称式

文字が三種類（三元）で, その内どの 2 つを入れ替えても, 元の式と同じになるものを三元対称式という.

例　$a^4+b^4+c^4$,　$a+b+c+abc$,　$\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}$,　$\cdots$

最も単純な次の対称式を基本対称式という.

基本対称式　$\boldsymbol{a+b+c}$ **(1 次式),** $\boldsymbol{ab+bc+ca}$ **(2 次式),** $\boldsymbol{abc}$ **(3 次式)**

★対称式は必ず基本対称式で表すことができる.

★ 公式 1　$\boldsymbol{a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)}$

★ 公式 2　$\boldsymbol{a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)}$

$\Leftrightarrow$　$\boldsymbol{a^3+b^3+c^3=(a+b+c)^3-3(a+b+c)(ab+bc+ca)+3abc}$

公式 2 の下の形は基本対称式で表したもの. 公式としては上の式で覚えておこう.

(1)　$a^2+ab+b^2+bc+c^2+ca$

$= a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca$
$= (a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)+(ab+bc+ca)$　←公式 1
$= \boldsymbol{(a+b+c)^2-(ab+bc+ca)}$

(2)　$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}$

$= \dfrac{bc}{abc}+\dfrac{ca}{abc}+\dfrac{ab}{abc}$　←通分
$= \boldsymbol{\dfrac{ab+bc+ca}{abc}}$

(3)　$a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+c^2a+ca^2+3abc$

$= (a^2b+ab^2+abc)+(b^2c+bc^2+abc)+(c^2a+ca^2+abc)$
$= ab(a+b+c)+bc(b+c+a)+ca(c+a+b)$
$= \boldsymbol{(a+b+c)(ab+bc+ca)}$

(4)　$(a+b)(b+c)(c+a)$

$a+b+c=A$ とおくと,
$a+b=A-c$,　$b+c=A-a$,　$c+a=A-b$

与式 $=(A-a)(A-b)(A-c)$
$= A^3-(a+b+c)A^2+(ab+bc+ca)A-abc$　←☆
$= (a+b+c)^3-(a+b+c)^3+(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc$
$= \boldsymbol{(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc}$

☆ $(x-a)(x-b)(x-c)=x^3-(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x-abc$
これは 3 次方程式の解と係数の関係を表している. 公式として覚えておくこと.

与式を展開して, 1, (3) を用いてもいい.

2. 次の式を基本対称式 $a+b+c,\ ab+bc+ca,\ abc$ を用いて表せ.（ S 級 2 分 40 秒, A 級 4 分, B 級 6 分, C 級 8 分 ）

(1) $(a+b-c)a+(b+c-a)b+(c+a-b)c$

$$
\begin{aligned}
&= a^2+ab-ca+b^2+bc-ab+c^2+ca-bc \\
&= a^2+b^2+c^2 \\
&= \boldsymbol{(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)}
\end{aligned}
$$

(2) $\dfrac{c}{ab}+\dfrac{a}{bc}+\dfrac{b}{ca}$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{c^2}{abc}+\frac{a^2}{abc}+\frac{b^2}{abc} \\
&= \frac{a^2+b^2+c^2}{abc} \\
&= \boldsymbol{\frac{(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)}{abc}}
\end{aligned}
$$

(3) $a^3+b^3+c^3$

$$
\begin{aligned}
(a+b+c)^3 &= (a+b+c)\cdot(a+b+c)^2 \\
&= (a+b+c)(a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca) \\
&= (a+b+c)(a^2+b^2+c^2)+2(a+b+c)(ab+bc+ca) \\
&= a(a^2+b^2+c^2)+b(a^2+b^2+c^2)+c(a^2+b^2+c^2)+2(a+b+c)(ab+bc+ca) \\
&= a^3+b^3+c^3+a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)+c(a^2+b^2)+2(a+b+c)(ab+bc+ca) \\
&= a^3+b^3+c^3+a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+c^2a+ca^2+2(a+b+c)(ab+bc+ca) \\
&= a^3+b^3+c^3+(a+b+c)(ab+bc+ca)-3abc+2(a+b+c)(ab+bc+ca) \quad \leftarrow \because 1,(3) \\
&= a^3+b^3+c^3+3(a+b+c)(ab+bc+ca)-3abc
\end{aligned}
$$

式を変形すれば,

$$a^3+b^3+c^3 = \boldsymbol{(a+b+c)^3-3(a+b+c)(ab+bc+ca)+3abc}$$

☆公式 2 の証明

公式を覚えていないと大変である.

(4) $(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)$

$a+b+c=A$ とおくと,

$$
\begin{aligned}
a+b-c &= a+b+c-2c = A-2c \\
b+c-a &= a+b+c-2a = A-2a \\
c+a-b &= a+b+c-2b = A-2b
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{与式} &= (A-2c)(A-2a)(A-2b) \\
&= A^3-2(a+b+c)A^2+4(ab+bc+ca)A-8abc \quad \leftarrow \text{参照 } 1,(4) \\
&= (a+b+c)^3-2(a+b+c)^3+4(a+b+c)(ab+bc+ca)-8abc \\
&= \boldsymbol{-(a+b+c)^3+4(a+b+c)(ab+bc+ca)-8abc}
\end{aligned}
$$