反射テスト　二元交代式　因数分解　01

1.　因数分解せよ.（ S 級 45 秒, A 級 1 分 30 秒, B 級 2 分 40 秒, C 級 4 分 ）

(1)　$a^2 - b^2$

(2)　$a(a-b) + b(b-a)$

(3)　$x^2(x-1) - y^2(y-1)$

2. 因数分解せよ.（ S 級 1 分, A 級 1 分 50 秒, B 級 3 分 20 秒, C 級 5 分 ）

(1) $a^3 - b^3$

(2) $a(a^2 - b^2) + b(b^2 - a^2)$

(3) $(x+1)x(x-1) - (y+1)y(y-1)$

反射テスト　二元交代式　因数分解　01　解答解説

1.　因数分解せよ.（ S 級 45 秒, A 級 1 分 30 秒, B 級 2 分 40 秒, C 級 4 分 ）

★ 二元対称式　文字が二種類（二元）で, その 2 つを入れ替えても, 元の式と同じになるものを二元対称式という.

例　x^5+y^5 ,　$x+y+24$,　$x^3+y^3+xy-3x-3y$,　$\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}$,　$\cdots$

これらの対称式は, 必ず基本対称式（和と積）のみで表すことができる.

つまり, **x, y の二元対称式は, 基本対称式 $x+y$ と xy で表すことができる.**

★ 公式 1　$\boldsymbol{x^2+y^2=(x+y)^2-2xy}$

★ 公式 2　$\boldsymbol{x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)}$

★ 二元交代式　文字が二種類（二元）で, その 2 つを入れ替えると, 元の式の -1 倍になるものを二元交代式という.

例　x^5-y^5 ,　y^2-x^2 ,　$\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}$,　$\cdots$

二元交代式は必ず **基本交代式 $(x-y)$** で **因数分解** できる.

x, y の二元交代式 $=(x-y)\times(x, y$ の二元対称式$)$

この法則「交代式 $=$ 基本交代式 $\times$ 対称式」は強力である. 覚えておこう.

(1)　a^2-b^2

$=\boldsymbol{(a+b)(a-b)}$

☆交代式の確認. a, b を入れ替えると,
$a^2-b^2 \quad \to \quad b^2-a^2=-(a^2-b^2)$
よって, (元の式) $\times(-1)$.
☆交代式 $=$ 基本交代式 $(a-b)\times$ 対称式
この場合は対称式が $(a+b)$ である.

(2)　$a(a-b)+b(b-a)$

$=a(a-b)-b(a-b)$

$=\boldsymbol{(a-b)^2}$

☆これは交代式ではない.
元の式も交代式っぽいし, 答えも $(a-b)$ で因数分解できているので勘違いしやすいが, 展開した式は,
　$a^2-2ab+b^2$ であるから,
a, b を入れ替えても元の式に等しい. つまり (2) は対称式.
一般的に, 交代式の 2 乗は対称式である.

(3)　$x^2(x-1)-y^2(y-1)$

$=x^3-x^2-y^3+y^2$

$=x^3-y^3-x^2+y^2$

$=(x-y)(x^2+xy+y^2)-(x-y)(x+y)$

$=\boldsymbol{(x-y)(x^2+xy+y^2-x-y)}$

☆交代式であるから, 因数 $(x-y)$ をもつ.
よって, 因数 $(x-y)$ でくくることを考えよう.

2. 因数分解せよ.（S 級 1 分, A 級 1 分 50 秒, B 級 3 分 20 秒, C 級 5 分）

(1) a^3-b^3

$=\boldsymbol{(a-b)(a^2+ab+b^2)}$

☆交代式の確認. a,b を入れ替えると,
$a^3-b^3 \quad\to\quad b^3-a^3=-(a^3-b^3)$
よって, (元の式) $\times(-1)$.
☆交代式 = 基本交代式 $(a-b)\times$ 対称式
この場合は対称式が (a^2+ab+b^2) である.

(2) $a(a^2-b^2)+b(b^2-a^2)$

$=a(a^2-b^2)-b(a^2-b^2)$

$=(a-b)(a^2-b^2)$

$=\boldsymbol{(a+b)(a-b)^2}$

☆これは交代式ではない.
元の式も交代式っぽいし, 答えも $(a-b)$ で因数分解できているので勘違いしやすいが, 前のページにもあるように, $(a-b)^2$ は対称式である.

(3) $(x+1)x(x-1)-(y+1)y(y-1)$

$=x(x^2-1)-y(y^2-1)$

$=x^3-x-y^3+y$

$=x^3-y^3-x+y$

$=(x-y)(x^2+xy+y^2)-(x-y)$

$=\boldsymbol{(x-y)(x^2+xy+y^2-1)}$

☆交代式であるから, 因数 $(x-y)$ をもつ.
よって, 因数 $(x-y)$ でくくることを考えよう.