反射テスト　二元対称式・交代式　計算　01

1.　$x=\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$, $y=\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ のとき，次の計算をせよ．(S 級 1 分 30 秒，A 級 2 分 20 秒，B 級 3 分 40 秒，C 級 5 分)

(1)　$x+y$

(2)　x^2+y^2

(3)　x^3+y^3

(4)　x^3-y^3

2. $x = \dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$, $y = \dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$ のとき，次の計算をせよ．(S 級 1 分 45 秒，A 級 2 分 40 秒，B 級 4 分，C 級 6 分)

(1) $x+y$

(2) x^2+y^2

(3) x^3+y^3

(4) x^3-y^3

反射テスト　二元対称式・交代式　計算　01　解答解説

1.　$x=\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$, $y=\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ のとき，次の計算をせよ．(S 級 1 分 30 秒，A 級 2 分 20 秒，B 級 3 分 40 秒，C 級 5 分)

★ 二元対称式

文字が二種類（二元）で，その 2 つを入れ替えても，元の式と同じになるものを二元対称式という．

例　x^5+y^5 ,　$x+y+24$,　$x^3+y^3+xy-3x-3y$,　$\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}$,　$\cdots$

これらの対称式は，必ず基本対称式（和と積）のみで表すことができる．

つまり，**x，y の二元対称式は，基本対称式 $x+y$ と xy で表すことができる．**

★ 公式 1　$\boldsymbol{x^2+y^2=(x+y)^2-2xy}$

★ 公式 2　$\boldsymbol{x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)}$

★ 二元交代式　文字が二種類（二元）で，その 2 つを入れ替えると，元の式の -1 倍になるものを二元交代式という．

例　x^5-y^5 ,　y^2-x^2 ,　$\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}$,　$\cdots$

二元交代式は必ず **基本交代式 $(x-y)$** で **因数分解** できる．

x,y の二元交代式 $=(x-y)\times(x,y$ の二元対称式$)$

この法則「交代式 $=$ 基本交代式 $\times$ 対称式」は強力である．覚えておこう．

(1)　$x+y$

$$=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$$

$$=\frac{\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\times\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\times\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}+\frac{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\times\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\times\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}$$

$$=\frac{\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2}{\left(\sqrt{3}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}+\frac{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2}{\left(\sqrt{3}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}$$

$$=3+2\sqrt{6}+2+3-2\sqrt{6}+2=\mathbf{10}$$

(2)　x^2+y^2

y は x の逆数であるから，$xy=1$

与式 $=(x+y)^2-2xy$

$=10^2-2\times1=\mathbf{98}$

(3)　x^3+y^3

$$=(x+y)^3-3xy(x+y)$$

$$=10^3-3\times1\times10=\mathbf{970}$$

(4)　x^3-y^3

$x-y=\left(3+2\sqrt{6}+2\right)-\left(3-2\sqrt{6}+2\right)=4\sqrt{6}$

与式 $=(x-y)(x^2+xy+y^2)$

$=4\sqrt{6}\left(x^2+y^2+xy\right)$

$=4\sqrt{6}\,(98+1)$

$=\mathbf{396\sqrt{6}}$

2. $x=\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$, $y=\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$ のとき，次の計算をせよ．(S 級 1 分 45 秒，A 級 2 分 40 秒，B 級 4 分，C 級 6 分)

★ 二元対称式

文字が二種類（二元）で，その 2 つを入れ替えても，元の式と同じになるものを二元対称式という．

例 x^5+y^5 , $x+y+24$, $x^3+y^3+xy-3x-3y$, $\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}$, $\cdots$

これらの対称式は，必ず基本対称式（和と積）のみで表すことができる．

つまり，**x，y の二元対称式は，基本対称式 $x+y$ と xy で表すことができる．**

★ 公式 1 $\boldsymbol{x^2+y^2=(x+y)^2-2xy}$

★ 公式 2 $\boldsymbol{x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)}$

★ 二元交代式 文字が二種類（二元）で，その 2 つを入れ替えると，元の式の -1 倍になるものを二元交代式という．

例 x^5-y^5 , y^2-x^2 , $\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}$, $\cdots$

二元交代式は必ず **基本交代式 $(x-y)$** で **因数分解** できる．

x,y の二元交代式 $=(x-y)\times(x,y$ の二元対称式$)$

この法則「交代式 $=$ 基本交代式 $\times$ 対称式」は強力である．覚えておこう．

(1) $x+y$

$$=\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$$

$$=\frac{(\sqrt{5}+\sqrt{3})\times(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{(\sqrt{5}-\sqrt{3})\times(\sqrt{5}+\sqrt{3})}+\frac{(\sqrt{5}-\sqrt{3})\times(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{(\sqrt{5}+\sqrt{3})\times(\sqrt{5}-\sqrt{3})}$$

$$=\frac{(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2}{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{3})^2}+\frac{(\sqrt{5}-\sqrt{3})^2}{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{3})^2}$$

$$=\frac{5+2\sqrt{15}+3}{2}+\frac{5-2\sqrt{15}+3}{2}=\mathbf{8}$$

(2) x^2+y^2

y は x の逆数であるから，$xy=1$

与式 $=(x+y)^2-2xy$

$=8^2-2\times1$

$=\mathbf{62}$

(3) x^3+y^3

$=(x+y)^3-3xy(x+y)$

$=8^3-3\times1\times8$

$=512-24$

$=\mathbf{488}$

(4) x^3-y^3

$$x-y=\frac{5+2\sqrt{15}+3}{2}-\frac{5-2\sqrt{15}+3}{2}=2\sqrt{15}$$

与式 $=(x-y)(x^2+xy+y^2)$

$=2\sqrt{15}\left(x^2+y^2+xy\right)$

$=2\sqrt{15}\,(62+1)$

$=\mathbf{126\sqrt{15}}$