反射テスト　二元対称式　計算　01

1.　$x = \dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$, $y = \dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$ のとき，次の計算をせよ．(S 級 1 分 10 秒，A 級 2 分，B 級 3 分 20 秒，C 級 5 分)

(1)　$x + y$

(2)　xy

(3)　$x^2 + y^2$

(4)　$x^3 + y^3$

2. $x = \dfrac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$, $y = \dfrac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$ のとき，次の計算をせよ．(S 級 1 分 10 秒，A 級 2 分，B 級 3 分 20 秒，C 級 5 分)

(1) $x + y$

(2) xy

(3) $x^2 + y^2$

(4) $x^3 + y^3$

反射テスト　二元対称式　計算　01　解答解説

1.　$x=\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$, $y=\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$ のとき，次の計算をせよ．(S 級 1 分 10 秒，A 級 2 分，B 級 3 分 20 秒，C 級 5 分)

★ 二元対称式

文字が二種類（二元）で，その 2 つを入れ替えても，元の式と同じになるものを二元対称式という．

例　x^5+y^5 ，$x+y+24$ ，$x^3+y^3+xy-3x-3y$ ，$\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}$ ，$\cdots$

これらの対称式は，必ず基本対称式（和と積）のみで表すことができる．

つまり，**x，y の二元対称式は，基本対称式 $x+y$ と xy で表すことができる．**

★ 公式 1　$\boldsymbol{x^2+y^2=(x+y)^2-2xy}$

★ 公式 2　$\boldsymbol{x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)}$

(1)　$x+y$

$$=\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}+\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$$

$$=\frac{(\sqrt{2}+1)\times(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)\times(\sqrt{2}+1)}+\frac{(\sqrt{2}-1)\times(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}+1)\times(\sqrt{2}-1)}$$

$$=\frac{(\sqrt{2}+1)^2}{(\sqrt{2})^2-1^2}+\frac{(\sqrt{2}-1)^2}{(\sqrt{2})^2-1^2}$$

$$=2+2\sqrt{2}+1+2-2\sqrt{2}+1=\mathbf{6}$$

(2)　xy

$$=\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\times\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}=\mathbf{1}$$

☆よく見れば y は x の逆数である．

(3)　x^2+y^2

$$=(x+y)^2-2xy$$

$$=6^2-2\times1=\mathbf{34}$$

(4)　x^3+y^3

$$=(x+y)^3-3xy(x+y)$$

$$=6^3-3\times1\times6=\mathbf{198}$$

☆別解　(3) の結果を用いて，

$$\begin{aligned}x^3+y^3&=(x+y)(x^2-xy+y^2)\\&=6(34-1)\\&=198\end{aligned}$$

2. $x = \dfrac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$, $y = \dfrac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$ のとき，次の計算をせよ．(S 級 1 分 10 秒，A 級 2 分，B 級 3 分 20 秒，C 級 5 分)

★ 二元対称式

文字が二種類（二元）で，その 2 つを入れ替えても，元の式と同じになるものを二元対称式という．

例　x^5+y^5 ，$x+y+24$ ，$x^3+y^3+xy-3x-3y$ ，$\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}$ ，$\cdots$

これらの対称式は，必ず基本対称式（和と積）のみで表すことができる．

つまり，**x，y の二元対称式は，基本対称式 $x+y$ と xy で表すことができる．**

★ 公式 1　$\boldsymbol{x^2+y^2=(x+y)^2-2xy}$

★ 公式 2　$\boldsymbol{x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)}$

(1)　$x+y$

$$= \frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} + \frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$$

$$= \frac{(2+\sqrt{3})\times(2+\sqrt{3})}{(2-\sqrt{3})\times(2+\sqrt{3})} + \frac{(2-\sqrt{3})\times(2-\sqrt{3})}{(2+\sqrt{3})\times(2-\sqrt{3})}$$

$$= \frac{(2+\sqrt{3})^2}{2^2-(\sqrt{3})^2} + \frac{(2-\sqrt{3})^2}{2^2-(\sqrt{3})^2}$$

$$= 4+4\sqrt{3}+3+4-4\sqrt{3}+3 = \mathbf{14}$$

(2)　xy

$$= \frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} \times \frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = \mathbf{1}$$

☆よく見れば y は x の逆数である．

(3)　x^2+y^2

$$= (x+y)^2-2xy$$

$$= 14^2-2\times 1 = \mathbf{194}$$

(4)　x^3+y^3

$$= (x+y)^3-3xy(x+y)$$

$$= 14^3-3\times 1\times 14 = \mathbf{2702}$$

☆別解　(3) の結果を用いて，

$$\begin{aligned} x^3+y^3 &= (x+y)(x^2-xy+y^2) \\ &= 14(194-1) \\ &= 2702 \end{aligned}$$