

反射テスト 二元対称式 $a^2 + b^2$, $a^3 + b^3$ 01

1. 次の式を $x + y = A$, $xy = B$ として計算せよ. (S 級 1 分, A 級 1 分 30 秒, B 級 2 分, C 級 3 分)

(1) $x^2 + xy + y^2$

(2) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$

(3) $x^3 + x^2y + xy^2 + y^3$

(4) $\frac{y}{x^2} + \frac{x}{y^2}$

2. 次の式を $x + y = A$, $xy = B$ として計算せよ. (S 級 1 分 15 秒, A 級 1 分 50 秒, B 級 3 分, C 級 5 分)

(1) $x^2 - 4xy + y^2$

(2) $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}$

(3) $x^3 - x^2y - xy^2 + y^3$

(4) $\frac{y}{x^3} + \frac{x}{y^3}$

反射テスト 二元対称式 $a^2 + b^2$, $a^3 + b^3$ 01 解答解説

1. 次の式を $x + y = A$, $xy = B$ として計算せよ。(S級1分, A級1分30秒, B級2分, C級3分)

★二元対称式

文字が二種類(二元)で, その2つを入れ替えても, 元の式と同じになるものを二元対称式という.

例 $x^5 + y^5$, $x + y + 24$, $x^3 + y^3 + xy - 3x - 3y$, $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}$, ...

これらの対称式は, 必ず基本対称式(和と積)のみで表すことができる.

つまり, x , y の二元対称式は, 基本対称式 $x + y$ と xy で表すことができる.

★公式1 $x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy$

★公式2 $x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y)$

(1) $x^2 + xy + y^2$

$$= x^2 + y^2 + xy$$

$$= (x + y)^2 - 2xy + xy \quad \leftarrow \text{公式①}$$

$$= (x + y)^2 - xy$$

$$= A^2 - B$$

(2) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$

$$= \frac{1 \times y}{x \times y} + \frac{1 \times x}{y \times x} \quad \leftarrow \text{通分}$$

$$= \frac{x + y}{xy}$$

$$= \frac{A}{B}$$

☆別解

$$= x^2 + xy + y^2 + xy - xy$$

$$= x^2 + 2xy + y^2 - xy$$

$$= (x + y)^2 - xy$$

$$= A^2 - B$$

(3) $x^3 + x^2y + xy^2 + y^3$

$$= x^3 + y^3 + x^2y + xy^2$$

$$= (x + y)^3 - 3xy(x + y) + xy(x + y) \quad \leftarrow \text{公式②}$$

$$= (x + y)^3 - 2xy(x + y)$$

$$= A^3 - 2BA$$

$$= A^3 - 2AB$$

(4) $\frac{y}{x^2} + \frac{x}{y^2}$

$$= \frac{y \times y^2}{x^2 \times y^2} + \frac{x \times x^2}{y^2 \times x^2} \quad \leftarrow \text{通分}$$

$$= \frac{x^3 + y^3}{x^2y^2}$$

$$= \frac{(x + y)^3 - 3xy(x + y)}{(xy)^2}$$

$$= \frac{A^3 - 3BA}{B^2}$$

$$= \frac{A^3 - 3AB}{B^2}$$

2. 次の式を $x + y = A$, $xy = B$ として計算せよ. (S 級 1 分 15 秒, A 級 1 分 50 秒, B 級 3 分, C 級 5 分)

$$(1) \quad x^2 - 4xy + y^2$$

$$= x^2 + y^2 - 4xy$$

$$= (x + y)^2 - 2xy - 4xy \quad \leftarrow \text{公式①}$$

$$= (x + y)^2 - 6xy$$

$$= \mathbf{A^2 - 6B}$$

$$(2) \quad \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}$$

$$= \frac{1 \times y^2}{x^2 \times y^2} + \frac{1 \times x^2}{y^2 \times x^2} \quad \leftarrow \text{通分}$$

$$= \frac{x^2 + y^2}{x^2 y^2}$$

$$= \frac{(x + y)^2 - 2xy}{(xy)^2} \quad \leftarrow \text{公式①}$$

$$= \frac{\mathbf{A^2 - 2B}}{\mathbf{B^2}}$$

$$(3) \quad x^3 - x^2y - xy^2 + y^3$$

$$= x^3 + y^3 - x^2y - xy^2$$

$$= (x + y)^3 - 3xy(x + y) - xy(x + y) \quad \leftarrow \text{公式②}$$

$$= (x + y)^3 - 4xy(x + y)$$

$$= \mathbf{A^3 - 4BA}$$

$$= \mathbf{A^3 - 4AB}$$

$$(4) \quad \frac{y}{x^3} + \frac{x}{y^3}$$

$$= \frac{y \times y^3}{x^3 \times y^3} + \frac{x \times x^3}{y^3 \times x^3} \quad \leftarrow \text{通分}$$

$$= \frac{x^4 + y^4}{x^3 y^3}$$

$$= \frac{(x^2 + y^2)^2 - 2x^2 y^2}{(xy)^3} \quad \leftarrow \text{ポイント参照}$$

$$= \frac{\{(x + y)^2 - 2xy\}^2 - 2(xy)^2}{(xy)^3} \quad \leftarrow \text{公式①}$$

$$= \frac{\mathbf{(A^2 - 2B)^2 - 2B^2}}{\mathbf{B^3}}$$

☆ポイント

$$x^2 = X, \quad y^2 = Y \quad \text{とおくと,}$$

$$x^4 + y^4$$

$$= X^2 + Y^2$$

$$= (X + Y)^2 - 2XY$$

$$= (x^2 + y^2)^2 - 2x^2 y^2$$