反射テスト　式変形　二項定理　04

1.　$\left(x^2+\dfrac{2}{x}-1\right)^7$ を展開したとき, x^2 の係数を求めよ.

（ S 級 2 分 40 秒, A 級 4 分, B 級 6 分, C 級 8 分 ）

2. $\left(x^2 - \dfrac{1}{2x} - 2\right)^8$ を展開したとき, x^2 の係数を求めよ.

（ S 級 2 分 40 秒, A 級 4 分, B 級 6 分, C 級 8 分 ）

反射テスト　式変形　二項定理　04　解答解説

1.　$\left(x^2+\dfrac{2}{x}-1\right)^7$ を展開したとき, x^2 の係数を求めよ.

（ S 級 2 分 40 秒, A 級 4 分, B 級 6 分, C 級 8 分 ）

★ 二項定理

$(a+b)^n = {}_n\mathrm{C}_0 a^n + {}_n\mathrm{C}_1 a^{n-1}b + {}_n\mathrm{C}_2 a^{n-2}b^2 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_{\mathbf{i}} a^{n-\mathbf{i}} b^{\mathbf{i}} + \cdots + {}_n\mathrm{C}_{n-2} a^2 b^{n-2} + {}_n\mathrm{C}_{n-1} ab^{n-1} + {}_n\mathrm{C}_n b^n$

★ 3 項以上への拡張

$(a+b+c)^n$ を展開したとき, $a^p b^q c^r$ の項の係数は,

$\dfrac{n!}{p!q!r!}$　ただし $p+q+r=n$

解答

定理から, 与式を展開したときの任意の項を, 0 以上の整数 p, q, r を用いて次のように表せる.

$\dfrac{7!}{p!q!r!}\cdot\left(x^2\right)^p\cdot\left(\dfrac{2}{x}\right)^q\cdot(-1)^r$ かつ $p+q+r=7$

x の次数に注目して, x^2 の項が出てくるのは,

$2p-1q=2$

$p+q+r=7$ かつ p, q, r が 0 以上の整数であるから, 複数考えられ, $(p,q,r)=(1,0,6),(2,2,3),(3,4,0)$

① $(p,q,r)=(1,0,6)$ のとき,　$\dfrac{7!}{1!0!6!}\cdot\left(x^2\right)^1\cdot\left(\dfrac{2}{x}\right)^0\cdot(-1)^6 \;=\; +7x^2$　　←☆ $0!=1$

② $(p,q,r)=(2,2,3)$ のとき,　$\dfrac{7!}{2!1!4!}\cdot\left(x^2\right)^2\cdot\left(\dfrac{2}{x}\right)^2\cdot(-1)^3 \;=\; -840x^2$

③ $(p,q,r)=(3,4,0)$ のとき,　$\dfrac{7!}{3!4!0!}\cdot\left(x^2\right)^3\cdot\left(\dfrac{2}{x}\right)^4\cdot(-1)^0 \;=\; +560x^2$　　←☆ $0!=1$

以上から x^2 の係数は,

$7-840+560=\mathbf{-273}$

2. $\left(x^2-\dfrac{1}{2x}-2\right)^8$ を展開したとき, x^2 の係数を求めよ.

（ S 級 2 分 40 秒, A 級 4 分, B 級 6 分, C 級 8 分 ）

★ 二項定理

$(a+b)^n={}_n\mathrm{C}_0a^n+{}_n\mathrm{C}_1a^{n-1}b+{}_n\mathrm{C}_2a^{n-2}b^2+\cdots+{}_n\mathrm{C}_\mathbf{i}a^{n-\mathbf{i}}b^\mathbf{i}+\cdots+{}_n\mathrm{C}_{n-2}a^2b^{n-2}+{}_n\mathrm{C}_{n-1}ab^{n-1}+{}_n\mathrm{C}_nb^n$

★ 3 項以上への拡張

$(a+b+c)^n$ を展開したとき, $a^pb^qc^r$ の項の係数は,

$\dfrac{n!}{p!q!r!}$ ただし $p+q+r=n$

解答

定理から, 与式を展開したときの任意の項を, 0 以上の整数 p,q,r を用いて次のように表せる.

$\dfrac{8!}{p!q!r!}\cdot\left(x^2\right)^p\cdot\left(-\dfrac{1}{2x}\right)^q\cdot(-2)^r$ かつ $p+q+r=8$

x の次数に注目して, x^2 の項が出てくるのは,

$2p-1q=2$

$p+q+r=8$ かつ p,q,r が 0 以上のであるから, 複数考えられ, $(p,q,r)=(1,0,7),(2,2,4),(3,4,1)$

① $(p,q,r)=(1,0,7)$ のとき, $\dfrac{8!}{1!0!7!}\cdot\left(x^2\right)^1\cdot\left(-\dfrac{1}{2x}\right)^0\cdot(-2)^7 = -1024x^2$ ←☆ $0!=1$

② $(p,q,r)=(2,2,4)$ のとき, $\dfrac{8!}{2!2!4!}\cdot\left(x^2\right)^2\cdot\left(-\dfrac{1}{2x}\right)^2\cdot(-2)^4 = +1680x^2$

③ $(p,q,r)=(3,4,1)$ のとき, $\dfrac{8!}{3!4!1!}\cdot\left(x^2\right)^3\cdot\left(-\dfrac{1}{2x}\right)^4\cdot(-2)^1 = -35x^2$

以上から x^2 の係数は,

$-1024+1680-35=\mathbf{621}$