

# 反射テスト 式変形 次数下げのテクニック 01

1. 計算せよ。(S級2分20秒, A級3分35秒, B級5分, C級7分)

(1)  $x = \sqrt{2} - 1$  のとき,  
 $x^3 + 3x^2$

(2)  $x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$  のとき,  
 $2x^4 - 5x^3 + 4x$

2. 計算せよ。(S級2分20秒, A級3分35秒, B級5分, C級7分)

(1)  $x = \sqrt{5} - 2$  のとき,  
 $-x^3 - 6x^2$

(2)  $x = \frac{1 + \sqrt{13}}{2}$  のとき,  
 $3x^4 - 7x^3 + 3x - 27$

# 反射テスト 式変形 次数下げのテクニック 01 解答解説

1. 計算せよ。(S級2分20秒, A級3分35秒, B級5分, C級7分)

★**次数下げ** 計算を楽にするためのテクニックである。

「 $x^2 = x$  の1次式」の形を用いて,  $x$  の整式を1次式に変換する. 下のような代入問題で多用する.

★**整式の商と余り** 整式の商と余りの表現がわかるなら, 別解のやり方が理想. 筆算を用いれば断然早い.

(1)  $x = \sqrt{2} - 1$  のとき,  $x^3 + 3x^2$

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{2} - 1 \\ \Leftrightarrow x + 1 &= \sqrt{2} \\ \Rightarrow (x + 1)^2 &= 2 \\ \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 &= 2 \\ \Leftrightarrow x^2 &= -2x + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{与式} &= x \times x^2 + 3 \times x^2 \\ &= x \times (-2x + 1) + 3(-2x + 1) \\ &= -2x^2 + x - 6x + 3 \\ &= -2x^2 - 5x + 3 \\ &= -2(-2x + 1) - 5x + 3 \\ &= 4x - 2 - 5x + 3 \\ &= -x + 1 \\ &= -(\sqrt{2} - 1) + 1 \\ &= -\sqrt{2} + 1 + 1 \\ &= \mathbf{2 - \sqrt{2}} \end{aligned}$$

☆別解 (範囲としては数2B)

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{2} - 1 \\ \Rightarrow (x + 1)^2 &= 2 \\ \Leftrightarrow x^2 + 2x - 1 &= 0 \end{aligned}$$

★**整式の割り算 (整式の筆算)**

$$\begin{array}{r} x + 1 \\ x^2 + 2x - 1 \overline{) x^3 + 3x^2} \\ \underline{x^3 + 2x^2 - x} \phantom{+ 3} \\ x^2 + x \phantom{+ 3} \\ \underline{x^2 + 2x - 1} \phantom{+ 3} \\ -x + 1 \phantom{+ 3} \end{array}$$

$$\begin{aligned} \therefore x^3 + 3x^2 &= (x^2 + 2x - 1)(x + 1) - x + 1 \\ &= 0(x + 1) - x + 1 \\ &= -x + 1 \\ &= -(\sqrt{2} - 1) + 1 \\ &= \mathbf{2 - \sqrt{2}} \end{aligned}$$

☆整式の商と余りの表現を用いるのが早い.

(2)  $x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$  のとき,  $2x^4 - 5x^3 + 4x$

$$\begin{aligned} x &= \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \\ \Leftrightarrow 2x - 1 &= -\sqrt{5} \\ \Rightarrow (2x - 1)^2 &= 5 \\ \Leftrightarrow 4x^2 - 4x + 1 &= 5 \\ \Leftrightarrow 4x^2 &= 4x + 4 \\ \Leftrightarrow x^2 &= x + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{与式} &= 2(x^2)^2 - 5x \times x^2 + 4x \\ &= 2 \times (x + 1)^2 - 5x(x + 1) + 4x \\ &= 2x^2 + 4x + 2 - 5x^2 - 5x + 4x \\ &= -3x^2 + 3x + 2 \\ &= -3(x + 1) + 3x + 2 \\ &= -3x - 3 + 3x + 2 \\ &= \mathbf{-1} \end{aligned}$$

☆別解 (範囲としては数2B)

$$\begin{aligned} x &= \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \\ \Rightarrow (2x - 1)^2 &= 5 \\ \Leftrightarrow x^2 - x - 1 &= 0 \end{aligned}$$

★**整式の割り算 (整式の筆算)**

$$\begin{array}{r} 2x^2 - 3x - 1 \\ x^2 - x - 1 \overline{) 2x^4 - 5x^3 + 4x} \\ \underline{2x^4 - 2x^3 - 2x^2} \phantom{+ 4x} \\ -3x^3 + 2x^2 + 4x \phantom{+ 4x} \\ \underline{-3x^3 + 3x^2 + 3x} \phantom{+ 4x} \\ -x^2 + x \phantom{+ 4x} \\ \underline{-x^2 + x + 1} \phantom{+ 4x} \\ -1 \phantom{+ 4x} \end{array}$$

$$\begin{aligned} \therefore 2x^4 - 5x^3 + 4x &= (x^2 - x - 1)(2x^2 - 3x - 1) - 1 \\ &= \mathbf{-1} \end{aligned}$$

2. 計算せよ。(S級2分20秒, A級3分35秒, B級5分, C級7分)

★**次数下げ** 計算を楽にするためのテクニックである。

「 $x^2 = x$  の1次式」の形を用いて,  $x$  の整式を1次式に変換する。下のような代入問題で多用する。

(1)  $x = \sqrt{5} - 2$  のとき,  
 $-x^3 - 6x^2$

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{5} - 2 \\ \Leftrightarrow x + 2 &= \sqrt{5} \\ \Rightarrow (x + 2)^2 &= 5 \\ \Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 &= 5 \\ \Leftrightarrow x^2 &= -4x + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{与式} &= x \times x^2 - 6 \times x^2 \\ &= -x \times (-4x + 1) - 6(-4x + 1) \\ &= 4x^2 - x + 24x - 6 \\ &= 4x^2 + 23x - 6 \\ &= 4(-4x + 1) + 23x - 6 \\ &= -16x + 4 + 23x - 6 \\ &= 7x - 2 \\ &= 7(\sqrt{5} - 2) - 2 \\ &= 7\sqrt{5} - 14 - 2 \\ &= \mathbf{7\sqrt{5} - 16} \end{aligned}$$

☆別解 (範囲としては数2B)

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{5} - 2 \\ \Rightarrow (x + 2)^2 &= 5 \\ \Leftrightarrow x^2 + 4x - 1 &= 0 \end{aligned}$$

★**整式の割り算** (整式の筆算)

$$\begin{array}{r} -x \quad -2 \\ \hline x^2 + 4x - 1 \overline{) -x^3 - 6x^2} \\ \underline{-x^3 - 4x^2 + x} \phantom{-2} \\ -2x^2 - x \phantom{-2} \\ \underline{-2x^2 - 8x + 2} \phantom{-2} \\ 7x - 2 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \therefore -x^3 - 6x^2 & \\ &= (x^2 + 4x - 1)(-x - 2) + 7x - 2 \\ &= 0(-x - 2) + 7x - 2 \\ &= 7x - 2 \\ &= 7(\sqrt{5} - 2) - 2 \\ &= \mathbf{7\sqrt{5} - 16} \end{aligned}$$

(2)  $x = \frac{1 + \sqrt{13}}{2}$  のとき,  
 $3x^4 - 7x^3 + 3x - 27$

$$\begin{aligned} x &= \frac{1 + \sqrt{13}}{2} \\ \Leftrightarrow 2x - 1 &= \sqrt{13} \\ \Rightarrow (2x - 1)^2 &= 13 \\ \Leftrightarrow 4x^2 - 4x + 1 &= 13 \\ \Leftrightarrow 4x^2 &= 4x + 12 \\ \Leftrightarrow x^2 &= x + 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{与式} &= 3(x^2)^2 - 7x \times x^2 + 3x - 27 \\ &= 3 \times (x + 3)^2 - 7x(x + 3) + 3x - 27 \\ &= 3x^2 + 18x + 27 - 7x^2 - 21x + 3x - 27 \\ &= -4x^2 \\ &= -4(x + 3) \\ &= -4x - 12 \\ &= -4 \times \frac{1 + \sqrt{13}}{2} - 12 \\ &= -2(1 + \sqrt{13}) - 12 \\ &= -2 - 2\sqrt{13} - 12 \\ &= \mathbf{-14 - 2\sqrt{13}} \end{aligned}$$

☆別解 (範囲としては数2B)

$$\begin{aligned} x &= \frac{1 + \sqrt{13}}{2} \Rightarrow (2x - 1)^2 = 13 \\ \Leftrightarrow x^2 - x - 3 &= 0 \end{aligned}$$

★**整式の割り算** (整式の筆算)

$$\begin{array}{r} 3x^2 - 4x + 5 \\ \hline x^2 - x - 3 \overline{) 3x^4 - 7x^3 + 3x - 27} \\ \underline{3x^4 - 3x^3 - 9x^2} \phantom{+ 3x - 27} \\ -4x^3 + 9x^2 + 3x \phantom{- 27} \\ \underline{-4x^3 + 4x^2 + 12x} \phantom{- 27} \\ 5x^2 - 9x - 27 \\ \underline{5x^2 - 5x - 15} \\ -4x - 12 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \therefore 3x^4 - 7x^3 + 3x - 27 & \\ &= (x^2 - x - 3)(3x^2 - 4x + 5) - 4x - 12 \\ &= -4x - 12 \\ &= -4 \times \frac{1 + \sqrt{13}}{2} - 12 \\ &= \mathbf{-14 - 2\sqrt{13}} \end{aligned}$$