反射テスト　因数分解　逆数を用いる　01

1.　$a^4+2a^3+3a^2+2a+1$ を因数分解せよ.（ S 級 1 分 10 秒, A 級 3 分, B 級 5 分 20 秒, C 級 9 分 ）

2. $a^4-4a^3+6a^2-4a+1$ を因数分解せよ.（ S 級 1 分 10 秒, A 級 3 分, B 級 5 分 20 秒, C 級 9 分 ）

反射テスト　因数分解　逆数を用いる　01　解答解説

1.　$a^4+2a^3+3a^2+2a+1$ を因数分解せよ.（ S 級 1 分 10 秒, A 級 3 分, B 級 5 分 20 秒, C 級 9 分 ）

$a \neq 0$ として, 次のような式変形をする.

与式 $= a^2\left(a^2+2a+3+\dfrac{2}{a}+\dfrac{1}{a^2}\right)$ ←★ 1 真ん中の項 a^2 でくくる.

$= a^2\left\{\left(a^2+\dfrac{1}{a^2}\right)+2\left(a+\dfrac{1}{a}\right)+3\right\}$

$= a^2\left\{\left(a+\dfrac{1}{a}\right)^2-2+2\left(a+\dfrac{1}{a}\right)+3\right\}$ ←★ 2

$= a^2\left\{\left(a+\dfrac{1}{a}\right)^2+2\left(a+\dfrac{1}{a}\right)+1\right\}$

$= a^2\left(A^2+2A+1\right)$ $\leftarrow A = a+\dfrac{1}{a}$ とした.

$= a^2\left(A+1\right)^2$

$= a^2\left(a+\dfrac{1}{a}+1\right)^2$

$= \left(a^2+1+a\right)^2$ $\leftarrow a$ を ( ) 内に

$= \boldsymbol{\left(a^2+a+1\right)^2}$

$a=0$ のときも, 与式と答えで値が同じであるから, $a=0$ のときも適する.

★ 1　係数が左右対称で項が奇数個
与式の係数は $1,2,3,2,1$ である. このように係数が左右対称で, 項が奇数個あるとき, 上のように $A = x+\dfrac{1}{x}$ として因数分解する方法がある.

★ 2　公式

$$a^2+\frac{1}{a^2} = \left(a+\frac{1}{a}\right)^2-2$$

これは公式としておさえておくこと.

☆別解　この問題には以下のような方法もある. 気が付けばこちらの方法が早いが汎用性には乏しい.

与式 $= (a^4+a^3+a^2)+(a^3+a^2+a)+(a^2+a+1)$

$= a^2(a^2+a+1)+a(a^2+a+1)+1(a^2+a+1)$

$= (a^2+a+1)^2$

2. $a^4-4a^3+6a^2-4a+1$ を因数分解せよ.（ S 級 1 分 10 秒, A 級 3 分, B 級 5 分 20 秒, C 級 9 分 ）

$a\neq 0$ として, 次のような式変形をする.

$$\begin{aligned}
\text{与式} &= a^2\left(a^2-4a+6-\frac{4}{a}+\frac{1}{a^2}\right) \quad \leftarrow\bigstar 1\ \text{真ん中の項}\ a^2\ \text{でくくる.}\\
&= a^2\left\{\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)-4\left(a+\frac{1}{a}\right)+6\right\}\\
&= a^2\left\{\left(a+\frac{1}{a}\right)^2-2-4\left(a+\frac{1}{a}\right)+6\right\} \quad \leftarrow\bigstar 2\\
&= a^2\left\{\left(a+\frac{1}{a}\right)^2-4\left(a+\frac{1}{a}\right)+4\right\}\\
&= a^2\left(A^2-4A+4\right) \quad \leftarrow A=a+\frac{1}{a}\ \text{とした.}\\
&= a^2\left(A-2\right)^2\\
&= a^2\left(a+\frac{1}{a}-2\right)^2\\
&= \left(a^2+1-2a\right)^2 \quad \leftarrow a\ \text{を}\ (\ )\ \text{内に}\\
&= \left(a^2-2a+1\right)^2\\
&= \boldsymbol{(a-1)^4}
\end{aligned}$$

$a=0$ のときも, 与式と答えで値が同じであるから, $a=0$ のときも適する.

★ 1　係数が左右対称で項が奇数個
与式の係数は $1,-4,6,-4,1$ である. このように係数が左右対称で, 項が奇数個であるとき, 上のように $A=x+\dfrac{1}{x}$ として因数分解する方法がある.

★ 2　公式

$$a^2+\frac{1}{a^2}=\left(a+\frac{1}{a}\right)^2-2$$

これは公式としておさえておくこと.

☆別解 1　この問題に限っては数 $2B$ で習う因数定理を用いて解くのが自然だろう. 3 次式以上をみたら $\pm1,\pm2,\pm3$ あたりを代入してみる癖が欲しい.

☆別解 2　係数の絶対値が $1,4,6,4,1$ であるから, $(x+1)^4=x^4+4x^3+6x^2+4x+1$ であることを知っていた人にとっては一瞬で解ける. 二項定理の練習時にお目にかかった人も多いはず.

☆別解 3　1(1) と同様に以下のような方法もある. しかしあまりにも非実用的である. 閃いた人がいれば素晴らしい.

$$\begin{aligned}
\text{与式} &= (a^4-2a^3+a^2)-2(a^3-2a^2+a)+(a^2-2a+1)\\
&= a^2(a^2+a+1)-2a(a^2+a+1)+1(a^2+a+1)\\
&= (a^2-2a+1)^2\\
&= (a-1)^4
\end{aligned}$$