

反射テスト 集合 知識 証明 03

1. 整数の集合を \mathbb{Z} で表す. 次の2つの集合 A と B が等しいことを証明せよ.

$$A = \{ n \mid n \in \mathbb{Z} \}$$

$$B = \{ 2a + 3b \mid a, b \in \mathbb{Z} \}$$

(S級 2分10秒, A級 3分, B級 4分30秒, C級 6分)

2. 整数の集合を \mathbb{Z} で表す. 次の2つの集合 A と B が等しいことを証明せよ.

$$A = \{ 2n \mid n \in \mathbb{Z} \}$$

$$B = \{ 6a + 10b \mid a, b \in \mathbb{Z} \}$$

(S 級 2 分 10 秒, A 級 3 分, B 級 4 分 30 秒, C 級 6 分)

反射テスト 集合 知識 証明 03 解答解説

1. 整数の集合を \mathbb{Z} で表す. 次の2つの集合 A と B が等しいことを証明せよ.

$$A = \{n \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

$$B = \{2a + 3b \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$$

(S級 2分10秒, A級 3分, B級 4分30秒, C級 6分)

① $A \subseteq B$ の証明

あらゆる整数 n に対して,

$$n = -2n + 3n$$

$$= 2 \cdot (-n) + 3 \cdot n$$

$$-n \text{ も } n \text{ も 整数なので, } n \in B \Rightarrow A \subseteq B$$

② $B \subseteq A$ の証明

整数は和・積について閉じているので,

$$\text{あらゆる整数 } a, b \text{ に対して, } 2a + 3b \in A \Rightarrow B \subseteq A$$

① かつ ② から, $A = B$.

★ 集合が等しいことの証明

$$A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \text{ かつ } B \subseteq A$$

★ 包含関係の証明

$$A \subseteq B \Leftrightarrow A \text{ のあらゆる要素 } a \text{ に対して, } a \in B$$

$$\Leftrightarrow \forall a \in A, a \in B$$

←記号表記「 \forall (ターン A)」は「あらゆる」の意.

$$\Leftrightarrow \forall a \in A, \exists b \in B, a = b$$

←記号表記「 \exists (ターン E)」は「存在する」の意.

★ 部分集合の記号

\subset , \subseteq , \subseteqq も同じ意味.

真部分集合(部分集合だが等しくない集合)を表すのに, \subsetneq を使うこともある.

★ 「 \forall (ターン A) \sim 」は「あらゆる \sim 」の意.

★ 「 \exists (ターン E) \sim 」は「ある \sim 」, 「 \sim が存在する」の意.

[全称記号・存在記号の否定](#)を参照.

2. 整数の集合を \mathbb{Z} で表す. 次の2つの集合 A と B が等しいことを証明せよ.

$$A = \{2n \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

(S級 2分10秒, A級 3分, B級 4分30秒, C級 6分)

$$B = \{6a + 10b \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$$

① $A \subseteq B$ の証明

あらゆる整数 n に対して,

$$\begin{aligned} 2n &= 12n - 10n \\ &= 6 \cdot 2n + 10 \cdot (-n) \end{aligned}$$

$$2n \text{ も } -n \text{ も整数なので, } 2n \in B \Rightarrow A \subseteq B$$

② $B \subseteq A$ の証明

整数は和・積について閉じているので, $3a + 5b$ も整数である.

$$\text{あらゆる整数 } a, b \text{ に対して, } 6a + 10b = 2(3a + 5b) \in A \Rightarrow B \subseteq A$$

①, ② から, $A = B$.

☆別解 記号「 \forall (ターン A)」, 「 \exists (ターン E)」による証明.

★「 \forall (ターン A) \sim 」は「あらゆる \sim 」の意.

★「 \exists (ターン E) \sim 」は「ある \sim 」, 「 \sim が存在する」の意.

[全称記号・存在記号の否定](#)を参照.

① $A \subseteq B$ の証明

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \exists a, b \in \mathbb{Z}, a = 2n \ \& \ b = -n.$$

$$\begin{aligned} 2n &= 12n - 10n \\ &= 6 \cdot 2n + 10 \cdot (-n) \\ &= 6a + 10b \end{aligned}$$

$$\therefore A \subseteq B.$$

② $B \subseteq A$ の証明

$$\forall a, b \in \mathbb{Z}, \exists n \in \mathbb{Z}, n = 3a + 5b.$$

$$6a + 10b = 2(3a + 5b) = 2n$$

$$\therefore B \subseteq A.$$

① & ② $\Leftrightarrow A = B$.