反射テスト　集合　知識　証明　02

1.　整数の集合を $\mathbb{Z}$ で表す. 次の 2 つの集合 A と B について考える.

$$\begin{aligned} \mathrm{A} &= \{\ 6m-1 \mid m \in \mathbb{Z}\ \} \\ \mathrm{B} &= \{\ 3n-1 \mid n \in \mathbb{Z}\} \end{aligned}$$

（ S 級 2 分 30 秒, A 級 3 分 40 秒, B 級 5 分, C 級 7 分 ）

(1)　下の $\boxed{}$ をうめよ.

$$\overline{\left(\mathrm{A} \cup \overline{\mathrm{B}}\right)} = \left\{\ \boxed{} \mid x \in \mathbb{Z}\ \right\}$$

(2)　A と B の関係について最も適当なものを選べ.

①　$\mathrm{A} = \mathrm{B}$　　②　$\mathrm{A} \subseteq \mathrm{B}$　　③　$\mathrm{B} \subseteq \mathrm{A}$

(3)　(2) を証明せよ.

2. 整数の集合を $\mathbb{Z}$ で表す. 次の 2 つの集合 A と B について考える.

$$\mathrm{A} = \{\, 2m+1 \mid m \in \mathbb{Z} \,\}$$
$$\mathrm{B} = \{\, 6n-1 \mid n \in \mathbb{Z} \}$$

（ S 級 3 分, A 級 4 分, B 級 5 分 30 秒, C 級 8 分 ）

(1) 下の $\boxed{}$ をうめよ.

$$\overline{\left(\overline{\mathrm{A}} \cup \mathrm{B}\right)} = \left\{ \boxed{} \mid x \in \mathbb{Z} \right\}$$

(2) A と B の関係について最も適当なものを選べ.

① $\mathrm{A} = \mathrm{B}$ ② $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{B}$ ③ $\mathrm{B} \subseteq \mathrm{A}$

(3) (2) を証明せよ.

反射テスト　集合　知識　証明　02　解答解説

1.　整数の集合を $\mathbb{Z}$ で表す．次の 2 つの集合 A と B について考える．

$$\mathrm{A} = \{\, 6m-1 \mid m \in \mathbb{Z} \,\}$$
$$\mathrm{B} = \{\, 3n-1 \mid n \in \mathbb{Z} \}$$

（S 級 2 分 30 秒，A 級 3 分 40 秒，B 級 5 分，C 級 7 分）

(1)　下の $\boxed{}$ をうめよ．

$$\overline{\left(\mathrm{A} \cup \overline{\mathrm{B}}\right)} = \left\{ \boxed{} \mid x \in \mathbb{Z} \right\}$$

★ ド・モルガンの法則　$\overline{(\mathbf{A} \cup \mathbf{B})} = \overline{\mathbf{A}} \cap \overline{\mathbf{B}}$

ド・モルガンの法則から，　$\overline{\left(\mathrm{A} \cup \overline{\mathrm{B}}\right)} = \overline{\mathrm{A}} \cap \overline{\overline{\mathrm{B}}} = \overline{\mathrm{A}} \cap \mathrm{B}$

★ 具体例を考える．

A	$=$	$\{$	$\cdots,$	$-13,$		$-7,$		$-1,$		$+5,$		$+11,$	$\cdots \}$
B	$=$	$\{$	$\cdots,$	$-13,$	$-10,$	$-7,$	$-4,$	$-1,$	$+2,$	$+5,$	$+8$	$+11,$	$\cdots \}$
$\overline{\mathrm{A}} \cap \mathrm{B}$	$=$	$\{$	$\cdots,$		$-10,$		$-4,$		$+2,$		$+8,$		$\cdots \}$

よって，　$\overline{\left(\mathrm{A} \cup \overline{\mathrm{B}}\right)} = \left\{ \boxed{\mathbf{6x-4}} \mid x \in \mathbb{Z} \right\}$

☆別解　$\mathbf{6x+2}$ や $\mathbf{6x+8}$ なども，もちろん正解．

(2)　A と B の関係について最も適当なものを選べ．

①　$\mathrm{A} = \mathrm{B}$　　②　$\mathrm{A} \subseteq \mathrm{B}$　　③　$\mathrm{B} \subseteq \mathrm{A}$

★ 具体例を考える．

(1) で考えた具体例から，　$\mathrm{A} \subseteq \mathrm{B}$　$\Rightarrow$　答え **②**

(3)　(2) を証明せよ．

あらゆる整数 m に対して，

$$6m-1 = 3 \cdot 2m - 1$$

$n = 2m$ を満たす整数 n が必ず存在するから，　$3 \cdot 2m - 1 \in \mathrm{B}$．

A のあらゆる要素が B に属するから，　$\mathrm{A} \subseteq \mathrm{B}$．

★ 包含関係の証明

$\mathrm{P} \subseteq \mathrm{Q}$　$\Leftrightarrow$　**集合 P のあらゆる要素が，集合 Q に属する．**

$\Leftrightarrow$　P のあらゆる要素 p に対して，$p \in \mathrm{Q}$

$\Leftrightarrow$　$\forall\, p \in \mathrm{P}\,,\ p \in \mathrm{Q}$　　←記号表記「∀（ターン A)」は「あらゆる」の意．

$\Leftrightarrow$　$\forall\, p \in \mathrm{P}\,,\ \exists\, q \in \mathrm{Q}\,,\ p = q$　　←記号表記「∃（ターン E)」は「存在する」の意．

★ 部分集合の記号

$\subset$, $\subseteq$, $\subseteqq$ も同じ意味．

真部分集合 (部分集合だが等しくない集合）を表すのに，$\subsetneqq$ を使うこともある．

★「∀（ターン A）～」は「あらゆる～」の意．

★「∃（ターン E）～」は「ある～」，「～が存在する」の意．

全称記号・存在記号の否定を参照．

2. 整数の集合を $\mathbb{Z}$ で表す. 次の 2 つの集合 A と B について考える.

$$\mathrm{A} = \{\, 2m+1 \mid m \in \mathbb{Z} \,\}$$
$$\mathrm{B} = \{\, 6n-1 \mid n \in \mathbb{Z} \}$$

（ S 級 3 分, A 級 4 分, B 級 5 分 30 秒, C 級 8 分 ）

(1) 下の $\boxed{}$ をうめよ.

$$\overline{\left(\overline{\mathrm{A}} \cup \mathrm{B}\right)} = \left\{ \boxed{} \mid x \in \mathbb{Z} \right\}$$

★ ド・モルガンの法則 $\quad \overline{(\mathbf{A} \cup \mathbf{B})} = \overline{\mathbf{A}} \cap \overline{\mathbf{B}}$

ド・モルガンの法則から, $\quad \overline{\left(\overline{\mathrm{A}} \cup \mathrm{B}\right)} = \overline{\overline{\mathrm{A}}} \cap \overline{\mathrm{B}} = \mathrm{A} \cap \overline{\mathrm{B}}$

★ 具体例を考える.

$$\begin{array}{rcllllllllllll}
\mathrm{A} & = & \{ & \cdots, & -7, & -5, & -3, & -1, & +1, & +3, & +5, & +7, & +9, & \cdots \ \} \\
\mathrm{B} & = & \{ & \cdots, & -7, & & & -1, & & & +5, & & & \cdots \ \} \\
\mathrm{A} \cap \overline{\mathrm{B}} & = & \{ & \cdots, & & -5, & -3, & & +1, & +3, & & +7, & +9, & \cdots \ \}
\end{array}$$

よって, $\quad \overline{\left(\overline{\mathrm{A}} \cup \mathrm{B}\right)} = \left\{ \boxed{\mathbf{6x+1} \text{ 又は } \mathbf{6x+3}} \mid x \in \mathbb{Z} \right\}$

☆別解 **「$(6x-5)$ 又は $(6x-3)$」**なども, もちろん正解.

(2) A と B の関係について最も適当なものを選べ.

① $\mathrm{A} = \mathrm{B}$ ② $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{B}$ ③ $\mathrm{B} \subseteq \mathrm{A}$

★ 具体例を考える.

(1) で考えた具体例から, $\quad \mathrm{B} \subseteq \mathrm{A} \quad \Rightarrow \quad$ 答え ③

(3) (2) を証明せよ.

あらゆる整数 n に対して,

$$\begin{aligned}
6n-1 &= 2\cdot 3n - 1 \\
&= 2\cdot 3n - 2 + 1 \\
&= 2\cdot (3n-1) + 1
\end{aligned}$$

$m = 3n-1$ を満たす整数 m が必ず存在するから, $\quad 2\cdot(3n-1)+1 \in \mathrm{A}$.
B のあらゆる要素が A に属するから, $\quad \mathrm{B} \subseteq \mathrm{A}$.

★ 包含関係の証明

$\mathrm{P} \subseteq \mathrm{Q} \iff$ **集合 P のあらゆる要素が, 集合 Q に属する.**
$\iff$ P のあらゆる要素 p に対して, $p \in \mathrm{Q}$
$\iff \forall\, p \in \mathrm{P}\,,\ p \in \mathrm{Q}$ ←記号表記「∀（ターン A)」は「あらゆる」の意.
$\iff \forall\, p \in \mathrm{P}\,,\ \exists\, q \in \mathrm{Q}\,,\ p = q$ ←記号表記「∃（ターン E)」は「存在する」の意.

★ 部分集合の記号

$\subset$, $\subseteq$, $\subseteqq$ も同じ意味.
真部分集合 (部分集合だが等しくない集合）を表すのに, $\subsetneq$ を使うこともある.

★「∀（ターン A）〜」は「あらゆる〜」の意.
★「∃（ターン E）〜」は「ある〜」,「〜が存在する」の意.
全称記号・存在記号の否定を参照.