反射テスト　集合　知識　証明　01

1.　整数の集合を $\mathbb{Z}$ で表す. 次の 2 つの集合 A と B について考える.

$$\mathrm{A} = \{\, 2m+1 \mid m \in \mathbb{Z} \,\}$$
$$\mathrm{B} = \{\, 4n+1 \mid n \in \mathbb{Z} \}$$

（ S 級 2 分 10 秒, A 級 3 分, B 級 4 分 30 秒, C 級 6 分 ）

(1)　下の $\boxed{}$ をうめよ.

$$\mathrm{A} \cap \overline{\mathrm{B}} = \left\{ \boxed{} \mid x \in \mathbb{Z} \right\}$$

(2)　A と B の関係について最も適当なものを選べ.

①　$\mathrm{A} = \mathrm{B}$　　②　$\mathrm{A} \subseteq \mathrm{B}$　　③　$\mathrm{B} \subseteq \mathrm{A}$

(3)　(2) を証明せよ.

2. 整数の集合を $\mathbb{Z}$ で表す．次の 2 つの集合 A と B について考える．

$$\begin{aligned} \mathrm{A} &= \{\, 9m+1 \mid m \in \mathbb{Z} \,\} \\ \mathrm{B} &= \{\, 3n+1 \mid n \in \mathbb{Z} \} \end{aligned}$$

（ S 級 2 分 10 秒，A 級 3 分，B 級 4 分 30 秒，C 級 6 分 ）

(1) 下の $\boxed{}$ をうめよ．

$$\overline{\mathrm{A}} \cap \mathrm{B} = \left\{ \boxed{} \mid x \in \mathbb{Z} \right\}$$

(2) A と B の関係について最も適当なものを選べ．

① $\mathrm{A} = \mathrm{B}$　② $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{B}$　③ $\mathrm{B} \subseteq \mathrm{A}$

(3) (2) を証明せよ．

反射テスト　集合　知識　証明　01　解答解説

1.　整数の集合を $\mathbb{Z}$ で表す. 次の 2 つの集合 A と B について考える.

$$\mathrm{A} = \{\, 2m+1 \mid m \in \mathbb{Z} \,\}$$
$$\mathrm{B} = \{\, 4n+1 \mid n \in \mathbb{Z} \}$$

（ S 級 2 分 10 秒, A 級 3 分, B 級 4 分 30 秒, C 級 6 分 ）

(1)　下の $\boxed{}$ をうめよ.

$$\mathrm{A} \cap \overline{\mathrm{B}} = \left\{ \boxed{} \mid x \in \mathbb{Z} \right\}$$

★ 具体例を考える.

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{A} & = & \{ \;\cdots,\; -7,\; -5,\; -3,\; -1,\; +1,\; +3,\; +5,\; +7,\; +9,\; \cdots \;\} \\ \mathrm{B} & = & \{ \;\cdots,\; -7,\; \; -3,\; \; +1,\; \; +5,\; \; +9,\; \cdots \;\} \\ \mathrm{A} \cap \overline{\mathrm{B}} & = & \{ \;\cdots,\; \; -5,\; \; -1,\; \; +3,\; \; +7,\; \; \cdots \;\} \end{array}$$

よって,　$\mathrm{A} \cap \overline{\mathrm{B}} = \left\{ \boxed{\boldsymbol{4x+3}} \mid x \in \mathbb{Z} \right\}$

☆別解　$\boldsymbol{4x-1}$ や $\boldsymbol{4x+7}$ なども, もちろん正解.

(2)　A と B の関係について最も適当なものを選べ.

①　$\mathrm{A} = \mathrm{B}$　　②　$\mathrm{A} \subseteq \mathrm{B}$　　③　$\mathrm{B} \subseteq \mathrm{A}$

★ 具体例を考える.

(1) で考えた具体例から,　$\mathrm{B} \subseteq \mathrm{A}$　$\Rightarrow$　答え **③**

(3)　(2) を証明せよ.

あらゆる整数 n に対して,

$$4n+1 = 2 \cdot 2n + 1$$

$m = 2n$ を満たす整数 m が必ず存在するから,　$2 \cdot 2n + 1 \in \mathrm{A}$.
B のあらゆる要素が A に属するから,　$\mathrm{B} \subseteq \mathrm{A}$.

★ 包含関係の証明

$\mathrm{P} \subseteq \mathrm{Q}$　$\Leftrightarrow$　**集合 P のあらゆる要素が, 集合 Q に属する.**
　　$\Leftrightarrow$　P のあらゆる要素 p に対して,　$p \in \mathrm{Q}$
　　$\Leftrightarrow$　$\forall\, p \in \mathrm{P}\,,\; p \in \mathrm{Q}$　　←記号表記「∀（ターン A)」は「あらゆる」の意.
　　$\Leftrightarrow$　$\forall\, p \in \mathrm{P}\,,\; \exists\, q \in \mathrm{Q}\,,\; p = q$　　←記号表記「∃（ターン E)」は「存在する」の意.

★ 部分集合の記号

$\subset$, $\subseteq$, $\subseteqq$ も同じ意味.
真部分集合 (部分集合だが等しくない集合）を表すのに, $\subsetneq$ を使うこともある.

★「∀（ターン A）〜」は「あらゆる〜」の意.
★「∃（ターン E）〜」は「ある〜」,「〜が存在する」の意.
全称記号・存在記号の否定を参照.

2. 整数の集合を $\mathbb{Z}$ で表す. 次の 2 つの集合 A と B について考える.

$$\begin{aligned} \mathrm{A} &= \{\, 9m+1 \mid m \in \mathbb{Z} \,\} \\ \mathrm{B} &= \{\, 3n+1 \mid n \in \mathbb{Z} \} \end{aligned}$$

(S 級 2 分 10 秒, A 級 3 分, B 級 4 分 30 秒, C 級 6 分)

(1) 下の $\boxed{}$ をうめよ.

$$\overline{\mathrm{A}} \cap \mathrm{B} = \left\{ \boxed{} \mid x \in \mathbb{Z} \right\}$$

★ 具体例を考える.

$$\begin{array}{lcllllllllllll} \mathrm{A} & = & \{ & \cdots, & & -8, & & & +1, & & & +10, & & \cdots \; \} \\ \mathrm{B} & = & \{ & \cdots, & -11, & -8, & -5, & -2, & +1, & +4, & +7, & +10, & +13, & \cdots \; \} \\ \overline{\mathrm{A}} \cap \mathrm{B} & = & \{ & \cdots, & -11, & & -5, & -2, & & +4, & +7, & & +13, & \cdots \; \} \end{array}$$

よって, $\overline{\mathrm{A}} \cap \mathrm{B} = \left\{ \boxed{\mathbf{9x+4 \text{ 又は } 9x+7}} \mid x \in \mathbb{Z} \right\}$

☆別解 **「$(9x-2)$ 又は $(9x-5)$」**なども, もちろん正解.

(2) A と B の関係について最も適当なものを選べ.

① $\mathrm{A} = \mathrm{B}$ ② $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{B}$ ③ $\mathrm{B} \subseteq \mathrm{A}$

★ 具体例を考える.

(1) で考えた具体例から, $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{B}$ $\Rightarrow$ 答え ②

(3) (2) を証明せよ.

あらゆる整数 m に対して,

$$9m+1 = 3 \cdot 3m + 1$$

$n = 3m$ を満たす整数 n が必ず存在するから, $3 \cdot 3m + 1 \in \mathrm{B}$.

A のあらゆる要素が B に属するから, $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{B}$.

★ 包含関係の証明

$\mathrm{P} \subseteq \mathrm{Q}$ $\Leftrightarrow$ **集合 P のあらゆる要素が, 集合 Q に属する.**

$\Leftrightarrow$ P のあらゆる要素 p に対して, $p \in \mathrm{Q}$

$\Leftrightarrow$ $\forall\, p \in \mathrm{P}\,,\ p \in \mathrm{Q}$ ←記号表記「$\forall$（ターン A)」は「あらゆる」の意.

$\Leftrightarrow$ $\forall\, p \in \mathrm{P}\,,\ \exists\, q \in \mathrm{Q}\,,\ p = q$ ←記号表記「$\exists$（ターン E)」は「存在する」の意.

★ 部分集合の記号

$\subset$, $\subseteq$, $\subseteqq$ も同じ意味.

真部分集合 (部分集合だが等しくない集合）を表すのに, $\subsetneqq$ を使うこともある.

★「$\forall$（ターン A）〜」は「あらゆる〜」の意.

★「$\exists$（ターン E）〜」は「ある〜」, 「〜が存在する」の意.

全称記号・存在記号の否定を参照.