反射テスト　三角比　公式の証明　01

1.　三角形 ABC において, 辺 BC,CA,AB の長さをそれぞれ a, b, c とする.

（ S 級 4 分, A 級 6 分, B 級 8 分, C 級 12 分 ）

(1)　$\cos \mathrm{A}$ を a, b, c の式で表せ.

(2)　$s = \dfrac{a+b+c}{2}$ とおけば, △ ABC の面積 S が, 次の式で与えられることを示せ.
$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

2. 円に内接する四角形 ABCD において, 辺 AB,BC,CD,DA の長さをそれぞれ a, b, c, d とする.

（ S 級 7 分, A 級 10 分, B 級 13 分, C 級 16 分 ）

(1) $\angle$BAD を θ , 辺 BD の長さを h とするとき, h を a, d, θ の式で表せ.

(2) h を b, c, θ の式で表せ.

(3) $cos\theta$ を a, b, c, d の式で表せ.

(4) $s = \dfrac{a+b+c+d}{2}$ とおけば, 四角形 ABCD の面積 S が, 次の式で与えられることを示せ.
$S = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$

反射テスト　三角比　公式の証明　01　解答解説

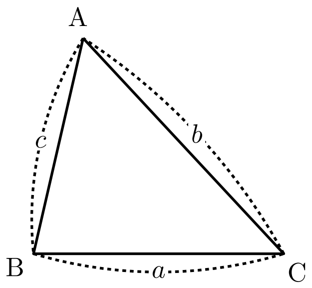
1.　三角形 ABC において, 辺 BC,CA,AB の長さをそれぞれ a, b, c とする.

（ S 級 4 分, A 級 6 分, B 級 8 分, C 級 12 分 ）

(1)　$\cos\mathrm{A}$ を a, b, c の式で表せ.

(2)　$s = \dfrac{a+b+c}{2}$ とおけば, △ ABC の面積 S が, 次の式で与えられることを示せ.

$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$



(1)　三角形 ABC に余弦定理を適用して,

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\mathrm{A}$

$$\mathbf{\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}$$

(2)

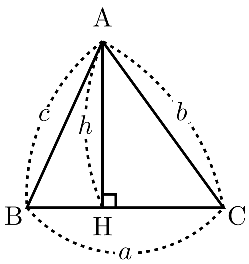
$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}bc\sin\mathrm{A} \\ &= \frac{1}{2}\cdot bc\sqrt{1-\cos^2\mathrm{A}} \qquad \because \quad 0^\circ < A < 180^\circ \quad \Rightarrow \quad \sin\mathrm{A} > 0 \end{aligned}$$

ここで, $S > 0$ として, S^2 を計算し, (1) の結果を代入すると,

$$\begin{aligned} S^2 &= \frac{1}{4}\cdot b^2c^2\left\{1 - \frac{(b^2+c^2-a^2)^2}{4b^2c^2}\right\} \\ &= \frac{1}{16}\cdot\left\{4b^2c^2 - (b^2+c^2-a^2)^2\right\} \\ &= \frac{1}{16}\cdot(2bc+b^2+c^2-a^2)(2bc-b^2-c^2+a^2) \\ &= \frac{1}{16}\cdot\left\{(b+c)^2-a^2\right\}\left\{a^2-(b-c)^2\right\} \\ &= \frac{1}{16}\cdot(b+c+a)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c) \\ &= \frac{1}{16}\cdot(a+b+c)(a+b+c-2a)(a+b+c-2c)(a+b+c-2b) \\ &= \frac{1}{16}\cdot 2s(2s-2a)(2s-2c)(2s-2b) \\ &= s(s-a)(s-c)(s-b) \end{aligned}$$

$S > 0$ であるから, $S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

上は ★ **ヘロンの公式** の証明. 参照 〜 ヘロンの公式のユークリッド幾何学的証明.



★ **ヘロンの公式** (Heron's formula)

$$\triangle\mathbf{ABC} = \sqrt{\boldsymbol{s(s-a)(s-b)(s-c)}} \quad \left(\textbf{ただし } \boldsymbol{s = \frac{a+b+c}{2}}\right)$$

ヘロン (Heron)　生没年不詳（紀元前 2 世紀〜紀元 3 世紀と様々な説がある. ）
古代ローマのアレキサンドリアのギリシャ人. 蒸気機関のアイデアや測量法でも有名. 著書「Mertica」でこの公式の証明を与えた. ラテン語の写本がローマの国立図書館に今も残る.

2. 円に内接する四角形 ABCD において, 辺 AB,BC,CD,DA の長さをそれぞれ a, b, c, d とする.

（ S 級 7 分, A 級 10 分, B 級 13 分, C 級 16 分 ）

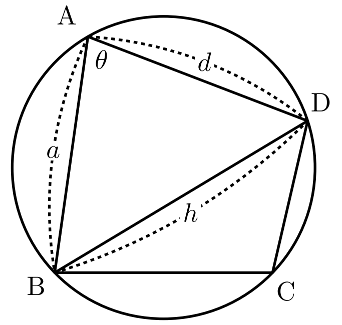
(1) $\angle$BAD を θ , 辺 BD の長さを h とするとき, h を a, d, θ の式で表せ.

(2) h を b, c, θ の式で表せ.

(3) $cos\theta$ を a, b, c, d の式で表せ.

(4) $s = \dfrac{a+b+c+d}{2}$ とおけば, 四角形 ABCD の面積 S が, 次の式で与えられることを示せ.

$S = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$



(1) 三角形 ABD に余弦定理を適用して,

$$h^2 = a^2 + d^2 - 2ad\cos\theta$$

$h > 0$ より,

$$\boldsymbol{h = \sqrt{a^2 + d^2 - 2ad\cos\theta}}$$

(2) 四角形 ABCD は円に内接するから, $\angle\mathrm{BCD} = 180^\circ - \theta$

三角形 BCD に余弦定理を適用して,

$$\begin{aligned} h^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos(180^\circ - \theta) \\ &= b^2 + c^2 + 2bc\cos\theta \end{aligned}$$

$h > 0$ より,

$$\boldsymbol{h = \sqrt{b^2 + c^2 + 2bc\cos\theta}}$$

(3) (1),(2) で得られた等式から, h を消去して,

$$a^2 + d^2 - 2ad\cos\theta = b^2 + c^2 + 2bc\cos\theta$$

$$\Leftrightarrow \quad \boldsymbol{\cos\theta = \frac{a^2 - b^2 - c^2 + d^2}{2(ad + bc)}} \qquad \because \quad ad + bc \neq 0$$

(4)

$$\begin{aligned} S &= \triangle\mathrm{ABD} + \triangle\mathrm{BCD} \\ &= \frac{1}{2}ad\sin\theta + \frac{1}{2}bc\sin(180^\circ - \theta) \\ &= \frac{(ad+bc)\sin\theta}{2} = \frac{(ad+bc)\sqrt{1-\cos^2\theta}}{2} \qquad \because \quad 0^\circ < \theta < 180^\circ \Rightarrow \sin\theta > 0 \end{aligned}$$

ここで, $S > 0$ として, S^2 を計算し, (3) の結果を代入すると,

$$\begin{aligned} S^2 &= \frac{1}{4}\cdot(ad+bc)^2\left\{1 - \frac{(a^2-b^2-c^2+d^2)^2}{4(ad+bc)^2}\right\} \\ &= \frac{1}{16}\cdot\left\{4(ad+bc)^2 - (a^2-b^2-c^2+d^2)^2\right\} \\ &= \frac{1}{16}\cdot(a+b+c+d-2c)(a+b+c+d-2b)(a+b+c+d-2d)(a+b+c+d-2a) \\ &= \frac{1}{16}\cdot(2s-2c)(2s-2b)(2s-2d)(2s-2a) \\ &= (s-a)(s-b)(s-c)(s-d) \end{aligned}$$

$S > 0$ であるから, $S = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$

★ ブラーマグプタの公式 (Brahmagupta's formula)

円に内接する四角形 ABCD $\boldsymbol{= \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}}$ $\left(\textbf{ただし } \boldsymbol{s = \dfrac{a+b+c+d}{2}}\right)$