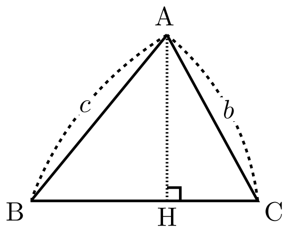
# 反射テスト　三角比　公式の証明　正弦定理・余弦定理　02

**1.**　鋭角三角形 ABC を用いて, 正弦定理を証明せよ.　（ $S$ 級 4 分 20 秒, $A$ 級 6 分, $B$ 級 8 分, $C$ 級 10 分 ）

**2.** 鋭角三角形 ABC を用いて, 余弦定理を証明せよ. ( $S$ 級 3 分 40 秒, $A$ 級 5 分, $B$ 級 7 分, $C$ 級 9 分 )

# 反射テスト　三角比　公式の証明　正弦定理・余弦定理　02　解答解説

**1.**　鋭角三角形 ABC を用いて, 正弦定理を証明せよ.　（ $S$ 級 4 分 20 秒, $A$ 級 6 分, $B$ 級 8 分, $C$ 級 10 分 ）




点 A から辺 BC へ下ろした垂線の足を H とする.

$\triangle$ABH に注目して,

$\mathrm{AH} = c\sin\mathrm{B}$

$\triangle$ACH に注目して,

$\mathrm{AH} = b\sin\mathrm{C}$

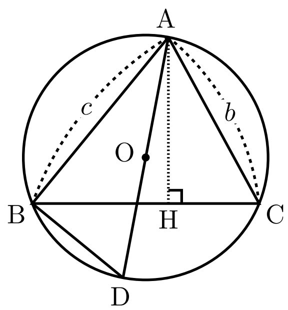
三角形の内角は $0^\circ$ より大きく, $180^\circ$ より小さいから, 正弦は 0 をとらない.

以上から,

$$c\sin\mathrm{B} = b\sin\mathrm{C} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{b}{\sin\mathrm{B}} = \frac{c}{\sin\mathrm{C}}$$

点 B から辺 CA に垂線を下ろして同様にすれば, $\dfrac{a}{\sin\mathrm{A}} = \dfrac{c}{\sin\mathrm{C}}$

$$\therefore \quad \frac{a}{\sin\mathrm{A}} = \frac{b}{\sin\mathrm{B}} = \frac{c}{\sin\mathrm{C}} \quad \cdots①$$




外接円の半径 $R$ について考える. 外接円の中心を O として,

直線 AO と外接円の交点のうち A ではないものを D とする.

AD は直径だから, $\mathrm{AD} = 2R$ .

円周角の定理より, $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ の円周角は等しいから,

$\angle\mathrm{ADB} = \angle\mathrm{ACB}$

$\triangle$ADB に注目して,

$\mathrm{AB} = \mathrm{AD}\sin\angle\mathrm{ADB}$

$\Rightarrow \quad c = 2R\sin\mathrm{C}$

$\Leftrightarrow \quad \dfrac{c}{\sin\mathrm{C}} = 2R \quad \cdots②$

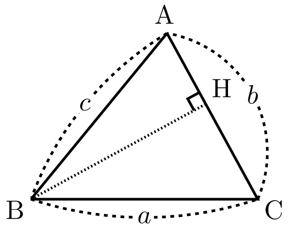
① と ② から　　正弦定理 $\dfrac{a}{\sin\mathrm{A}} = \dfrac{b}{\sin\mathrm{B}} = \dfrac{c}{\sin\mathrm{C}} = 2R$ が成り立つ.

★正弦定理の証明

**垂線の長さ** を 2 通り表せるので, それらで等式を作ることができる.

外接円の半径については三角形の外接円を描けばよい.

**2.**　鋭角三角形 ABC を用いて, 余弦定理を証明せよ.　　（ $S$ 級 3 分 40 秒, $A$ 級 5 分, $B$ 級 7 分, $C$ 級 9 分 ）




点 B から辺 CA へ下ろした垂線の足を H とする.
△ABH に注目して,

$$\mathrm{BH} = c\sin\mathrm{A}$$
$$\mathrm{AH} = c\cos\mathrm{A}$$
$$\Rightarrow\quad \mathrm{CH} = b - c\cos\mathrm{A}$$

△BCH に三平方の定理を適用して,

$$\begin{array}{ccccc} & \mathrm{BC}^2 & = & \mathrm{BH}^2 & + & \mathrm{CH}^2 \\ \Rightarrow & a^2 & = & (c\sin\mathrm{A})^2 & + & (b - c\cos\mathrm{A})^2 \\ \Leftrightarrow & a^2 & = & c^2\sin^2\mathrm{A} & + & b^2 - 2bc\cos\mathrm{A} + c^2\cos^2\mathrm{A} \end{array}$$

$c^2\sin^2\mathrm{A} + c^2\cos^2\mathrm{A} = c^2(\sin^2\mathrm{A} + \cos^2\mathrm{A}) = c^2$　より,

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\mathrm{A}$$

対称性から,

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos\mathrm{B}$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\mathrm{C}$$

★余弦定理の証明
最後は **三平方の定理** を用いる.