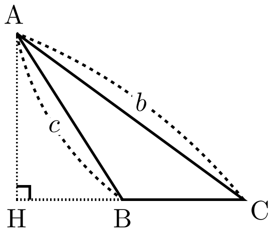
反射テスト　三角比　公式の証明　正弦定理・余弦定理　01

1.　下図は $\angle \mathrm{B}$ が鈍角の鈍角三角形 ABC である．これを用いて, 次の等式を証明せよ.

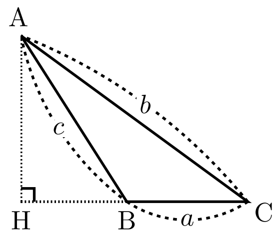
$$\frac{b}{\sin \mathrm{B}} = \frac{c}{\sin \mathrm{C}}$$

（ S 級 1 分 30 秒, A 級 2 分, B 級 3 分, C 級 4 分 ）



2. 下図は $\angle \mathrm{B}$ が鈍角の鈍角三角形 ABC である．これを用いて, 次の等式を証明せよ．

$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos\mathrm{B}$　　（ S 級 2 分 30 秒, A 級 3 分 30 秒, B 級 4 分 30 秒, C 級 6 分 ）

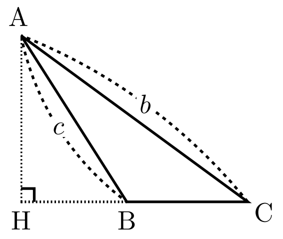


反射テスト　三角比　公式の証明　正弦定理・余弦定理　01　解答解説

1.　下図は $\angle\mathrm{B}$ が鈍角の鈍角三角形 ABC である．これを用いて, 次の等式を証明せよ.

$$\frac{b}{\sin\mathrm{B}} = \frac{c}{\sin\mathrm{C}}$$

（ S 級 1 分 30 秒, A 級 2 分, B 級 3 分, C 級 4 分 ）



点 A から辺 BC へ下ろした垂線の足を H とする.

$\triangle$ABH に注目して,

$\mathrm{AH} = c\sin(180^\circ - \mathrm{B}) = c\sin\mathrm{B}$

$\triangle$ACH に注目して,

$\mathrm{AH} = b\sin\mathrm{C}$

三角形の内角は 0° より大きく, 180° より小さいから, 正弦は 0 をとらない.

以上から,

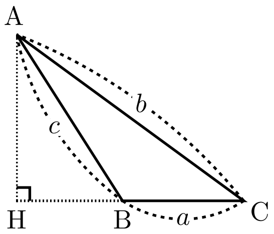
$$c\sin\mathrm{B} = b\sin\mathrm{C} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{b}{\sin\mathrm{B}} = \frac{c}{\sin\mathrm{C}}$$

★正弦定理の証明

垂線の長さ を 2 通り表せるので, それらで等式を作ることができる.

2. 下図は $\angle\mathrm{B}$ が鈍角の鈍角三角形 ABC である．これを用いて, 次の等式を証明せよ．

$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos\mathrm{B}$ （ S 級 2 分 30 秒, A 級 3 分 30 秒, B 級 4 分 30 秒, C 級 6 分 ）



点 A から辺 BC へ下ろした垂線の足を H とする．

$\triangle$ABH に注目して,

$\mathrm{AH} = c\sin(180^\circ - \mathrm{B}) = c\sin\mathrm{B}$

$\mathrm{BH} = c\cos(180^\circ - \mathrm{B}) = -c\cos\mathrm{B}$

$\mathrm{CH} = \mathrm{BC} + \mathrm{BH} = a + (-c\cos\mathrm{B}) = a - c\cos\mathrm{B}$

$\triangle$ACH に三平方の定理を適用して,

$$\begin{array}{cccccc} & \mathrm{CA}^2 & = & \mathrm{AH}^2 & + & \mathrm{CH}^2 \\ \Rightarrow & b^2 & = & (c\sin\mathrm{B})^2 & + & (a - c\cos\mathrm{B})^2 \\ \Leftrightarrow & b^2 & = & c^2\sin^2\mathrm{B} & + & a^2 - 2ca\cos\mathrm{B} + c^2\cos^2\mathrm{B} \end{array}$$

$c^2\sin^2\mathrm{B} + c^2\cos^2\mathrm{B} = c^2(\sin^2\mathrm{B} + \cos^2\mathrm{B}) = c^2$ より,

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos\mathrm{B}$$

★余弦定理の証明

最後は **三平方の定理** を用いる．

この問題の場合, 「 $b^2 = \sim$ 」とあるので, CA を斜辺とする直角三角形に注目．