

反射テスト 三角比 正五角形 01

1. 一辺の長さが 1 の正五角形の対角線の長さを求め, それを用いて $\cos 36^\circ$ を求めよ.

(S 級 1 分, A 級 3 分 40 秒, B 級 6 分, C 級 8 分)

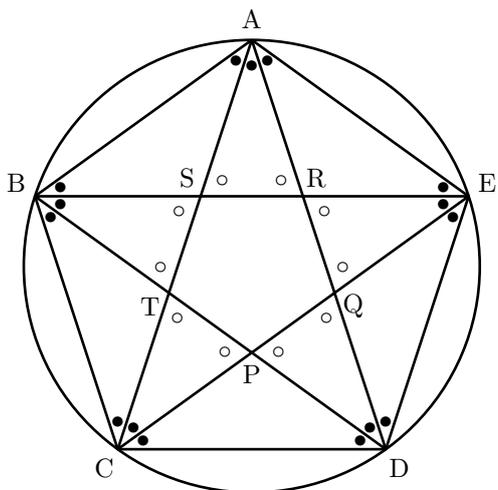
2. 一辺の長さが1の正五角形の対角線の長さを求め, それを用いて $\cos 108^\circ$ を求めよ.

(S級1分30秒, A級3分40秒, B級6分, C級8分)

反射テスト 三角比 正五角形 01 解答解説

1. 一辺の長さが1の正五角形の対角線の長さを求め、それを用いて $\cos 36^\circ$ を求めよ.

(S級1分, A級3分40秒, B級6分, C級8分)



一辺の長さが1の正五角形 ABCDE を用いる.

対角線の交点を図のように定める.

二角相等から, $\triangle ACD \sim \triangle CSB$.

どちらも $36^\circ, 72^\circ, 72^\circ$ の内角をもつ二等辺三角形である.

対角線の長さを求める.

★ 求めたいものを文字でおく.

AC の長さを x とおくと, 正五角形の対角線の長さは全て x .

つまり, $SB = BE - SE = x - 1$ $\triangle ACD \sim \triangle CSB$ より,

$$AC : CD = CS : SB$$

$$x : 1 = 1 : (x - 1)$$

$$\Leftrightarrow x(x - 1) = 1 \times 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$x > 0 \text{ より, } x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

二等辺三角形 ACD に余弦定理を適用して,

$$CD^2 = AC^2 + DA^2 - 2AC \cdot DA \cdot \cos \angle CAD$$

$$\Rightarrow 1^2 = x^2 + x^2 - 2 \cdot x \cdot x \cdot \cos 36^\circ$$

$$\Leftrightarrow 1 = 2x^2 - 2x^2 \cos 36^\circ$$

$$\Leftrightarrow \cos 36^\circ = 1 - \frac{1}{2x^2}$$

$$\Leftrightarrow \cos 36^\circ = 1 - \frac{1}{3 + \sqrt{5}}$$

$$\Leftrightarrow \cos 36^\circ = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$$

☆別解 A から BE に垂線を引いたときの足を H とすれば, $AB = 1$, $\angle ABH = 36^\circ$ であるから,

$$\cos 36^\circ = \frac{BH}{AB} = \frac{1}{2}BE = \frac{x}{2} = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$$

黄金比を知っていれば, このイメージで $\cos 36^\circ$ もすぐわかる.

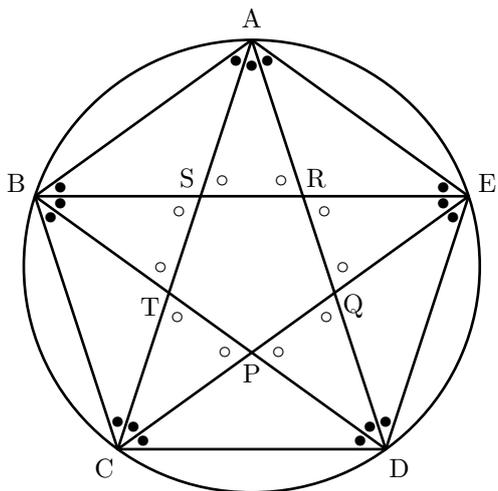
★ 正五角形の一辺の長さ と 対角線の長さの比は黄金比 $1 : \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ ($\cong 5 : 8$)

$\frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1.6180339887\dots$ を **黄金数** と言い, ギリシア文字の「 ϕ 」で表し, 別名「外中比」, 「中末比」とも呼ばれる.

昔から美しい比として知られ, 美術・建築・デザイン・自然科学などいろいろな分野で見られる比である.

2. 一辺の長さが1の正五角形の対角線の長さを求め、それを用いて $\cos 108^\circ$ を求めよ.

(S級1分30秒, A級3分40秒, B級6分, C級8分)



一辺の長さが1の正五角形 ABCDE を用いる.

対角線の交点を図のように定める.

二角相等から, $\triangle ABE \sim \triangle SAB$.

どちらも $108^\circ, 36^\circ, 36^\circ$ の内角をもつ二等辺三角形である.

対角線の長さを求める.

★ 求めたいものを文字でおく.

BE の長さを x とおくと, 正五角形の対角線の長さは全て x .

つまり, $SA = AC - CS = x - 1$

$\triangle ABE \sim \triangle SAB$ より,

$$AB : BE = SA : AB$$

$$1 : x = (x - 1) : 1$$

$$\Leftrightarrow x(x - 1) = 1 \times 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$x > 0 \text{ より, } x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

二等辺三角形 ABE に余弦定理を適用して,

$$BE^2 = AB^2 + EA^2 - 2AB \cdot EA \cdot \cos \angle BAE$$

$$\Rightarrow x^2 = 1^2 + 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos 108^\circ$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 2 - 2 \cos 108^\circ$$

$$\Leftrightarrow 2 \cos 108^\circ = 2 - x^2$$

$$\Leftrightarrow 2 \cos 108^\circ = 2 - \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos 108^\circ = \frac{1 - \sqrt{5}}{4}$$

☆別解 A から BD に垂線を引いたときの足を H とすれば, $AT = 1$, $\angle ATD = 108^\circ$ であるから,

$$\cos 108^\circ = -\frac{TH}{AT} = -\frac{1}{2}BT = -\frac{x-1}{2} = \frac{1-\sqrt{5}}{4}$$

黄金比を知っていれば, このイメージで $\cos 108^\circ$ もすぐわかる.

★ 正五角形の一辺の長さ と 対角線の長さ の比は黄金比 $1 : \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ ($\approx 5 : 8$)

$\frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1.6180339887 \dots$ を **黄金数** と言い, ギリシア文字の「 ϕ 」で表し, 別名「外中比」, 「中末比」とも呼ばれる.

昔から美しい比として知られ, 美術・建築・デザイン・自然科学などいろいろな分野で見られる比である.