反射テスト　三角比　三角形の面積　03

1.　次の $\triangle\mathrm{ABC}$ の面積を求めよ．ただし，$\mathrm{BC}=a$，$\mathrm{CA}=b$，$\mathrm{AB}=c$ とする．
（S 級 1 分 30 秒，A 級 2 分 40 秒，B 級 3 分 50 秒，C 級 5 分）

(1)　$\mathrm{A}=150^\circ$，$b=8$，$c=6$

(2)　$\mathrm{C}=135^\circ$，$a=b=4\sqrt{2}$

(3)　$\cos\mathrm{B}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$，$a=2\sqrt{2}$，$c=2\sqrt{3}$

(4)　$\mathrm{A}=120^\circ$，$a=\sqrt{6}$，$b=2$

2. 次の $\triangle\mathrm{ABC}$ の面積を求めよ. ただし, $\mathrm{BC}=a$, $\mathrm{CA}=b$, $\mathrm{AB}=c$ とする.

(S 級 1 分 30 秒, A 級 2 分 40 秒, B 級 3 分 50 秒, C 級 5 分)

(1) $\mathrm{A}=120^\circ$, $b=4$, $c=\sqrt{6}$

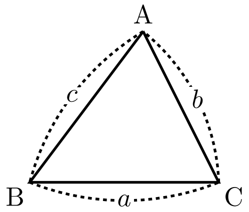
(2) $\mathrm{C}=45^\circ$, $a=b=2\sqrt{6}$

(3) $\cos\mathrm{B}=-\dfrac{1}{\sqrt{5}}$, $a=3\sqrt{2}$, $c=\sqrt{10}$

(4) $\mathrm{A}=135^\circ$, $a=\sqrt{6}$, $b=\sqrt{3}$

反射テスト　三角比　三角形の面積　03　解答解説

1.　次の △ABC の面積を求めよ．ただし，$\mathrm{BC}=a$，$\mathrm{CA}=b$，$\mathrm{AB}=c$ とする．
（ S 級 1 分 30 秒，A 級 2 分 40 秒，B 級 3 分 50 秒，C 級 5 分 ）



★ 三角形の面積　$\triangle \mathbf{ABC}=\dfrac{1}{2}\boldsymbol{bc}\sin\mathbf{A}$

三角形の面積を求める公式である．文字を循環させて，

$\triangle\mathrm{ABC}=\dfrac{1}{2}bc\sin\mathrm{A}=\dfrac{1}{2}ca\sin\mathrm{B}=\dfrac{1}{2}ab\sin\mathrm{C}$

とも言える．左図のように，2 辺夾角相等をイメージするとよい．

(1)　$\mathrm{A}=150^\circ$，$b=8$，$c=6$

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{ABC}&=\tfrac{1}{2}bc\sin\mathrm{A}\\&=\tfrac{1}{2}\cdot 8\cdot 6\sin 150^\circ\\&=\tfrac{1}{2}\cdot 8\cdot 6\cdot\tfrac{1}{2}\\&=\mathbf{12}\quad\text{…答え}\end{aligned}$$

(2)　$\mathrm{C}=135^\circ$，$a=b=4\sqrt{2}$

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{ABC}&=\tfrac{1}{2}ab\sin\mathrm{C}\\&=\tfrac{1}{2}\cdot(4\sqrt{2})^2\sin 135^\circ\\&=\tfrac{1}{2}\cdot 32\cdot\tfrac{1}{\sqrt{2}}\\&=\mathbf{8\sqrt{2}}\quad\text{…答え}\end{aligned}$$

(3)　$\cos\mathrm{B}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$，$a=2\sqrt{2}$，$c=2\sqrt{3}$

$\cos\mathrm{B}=\frac{1}{\sqrt{3}}$ から，$\sin\mathrm{B}$ を求める．

$\sin^2\mathrm{B}+\cos^2\mathrm{B}=1$

$\sin^2\mathrm{B}+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2=1$

$\Rightarrow\quad\sin^2\mathrm{B}=\frac{2}{3}$

$\Rightarrow\quad\sin\mathrm{B}=\pm\frac{\sqrt{6}}{3}$

B は三角形の内角だから，$0^\circ<\mathrm{B}<180^\circ$

よって，$\sin\mathrm{B}>0$ より，

$\sin\mathrm{B}=\frac{\sqrt{6}}{3}$

ゆえに，

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{ABC}&=\tfrac{1}{2}ca\sin\mathrm{B}\\&=\tfrac{1}{2}\cdot 2\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{3}\cdot\tfrac{\sqrt{6}}{3}\\&=\mathbf{4}\quad\text{…答え}\end{aligned}$$

(4)　$\mathrm{A}=120^\circ$，$a=\sqrt{6}$，$b=2$

★ 余弦定理 より，

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\mathrm{A}$

$\sqrt{6}^2=2^2+c^2-2\cdot 2c\cos 120^\circ$

$6=4+c^2-4c\times\left(-\frac{1}{2}\right)$

$c^2+2c-2=0$

$c=-1\pm\sqrt{3}$　（←**★偶数公式**）

c は三角形の辺の長さであるから，$c>0$

ゆえに，$c=-1+\sqrt{3}$

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{ABC}&=\tfrac{1}{2}bc\sin\mathrm{A}\\&=\tfrac{1}{2}\cdot 2\cdot(-1+\sqrt{3})\cdot\tfrac{\sqrt{3}}{2}\\&=\mathbf{\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}}\quad\text{…答え}\end{aligned}$$

☆別解

★ 正弦定理 から　$\sin\mathrm{B}\Rightarrow\mathrm{B}$ の特定 $\Rightarrow\mathrm{C}$

$\Rightarrow\ \frac{1}{2}ab\sin\mathrm{C}$

こちらの方が早いと思うが次の知識が必要．

$\sin 15^\circ=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

2. 次の $\triangle$ABC の面積を求めよ. ただし, $\mathrm{BC}=a$, $\mathrm{CA}=b$, $\mathrm{AB}=c$ とする.

(S 級 1 分 30 秒, A 級 2 分 40 秒, B 級 3 分 50 秒, C 級 5 分)

(1) $\mathrm{A}=120^\circ$, $b=4$, $c=\sqrt{6}$

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{ABC} &= \tfrac{1}{2}bc\sin\mathrm{A}\\ &= \tfrac{1}{2}\cdot 4\cdot\sqrt{6}\sin 120^\circ\\ &= \tfrac{1}{2}\cdot 4\cdot\sqrt{6}\cdot\tfrac{\sqrt{3}}{2}\\ &= \mathbf{3\sqrt{2}}\end{aligned}$$

…答え

(2) $\mathrm{C}=45^\circ$, $a=b=2\sqrt{6}$

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{ABC} &= \tfrac{1}{2}ab\sin\mathrm{C}\\ &= \tfrac{1}{2}\cdot(2\sqrt{6})^2\sin 45^\circ\\ &= \tfrac{1}{2}\cdot 24\cdot\tfrac{1}{\sqrt{2}}\\ &= \mathbf{6\sqrt{2}}\end{aligned}$$

…答え

(3) $\cos\mathrm{B}=-\dfrac{1}{\sqrt{5}}$, $a=3\sqrt{2}$, $c=\sqrt{10}$

$\cos\mathrm{B}=-\frac{1}{\sqrt{5}}$から, $\sin\mathrm{B}$ を求める.

$\sin^2\mathrm{B}+\cos^2\mathrm{B}=1$

$\sin^2\mathrm{B}+\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2=1$

$\Rightarrow\quad \sin^2\mathrm{B}=\frac{4}{5}$

$\Rightarrow\quad \sin\mathrm{B}=\pm\frac{2}{\sqrt{5}}$

B は三角形の内角だから, $0^\circ<\mathrm{B}<180^\circ$

よって, $\sin\mathrm{B}>0$ より,

$\sin\mathrm{B}=\frac{2}{\sqrt{5}}$

ゆえに,

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{ABC} &= \tfrac{1}{2}ca\sin\mathrm{B}\\ &= \tfrac{1}{2}\cdot 3\sqrt{2}\cdot\sqrt{10}\cdot\tfrac{2}{\sqrt{5}}\\ &= \mathbf{6}\end{aligned}$$

…答え

(4) $\mathrm{A}=135^\circ$, $a=\sqrt{6}$, $b=\sqrt{3}$

★ 余弦定理 より,

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\mathrm{A}$

$\sqrt{6}^2=\sqrt{3}^2+c^2-2\cdot\sqrt{3}c\cos 135^\circ$

$6=3+c^2-2\sqrt{3}c\times\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$c^2+\sqrt{6}c-3=0$

$c=\frac{-\sqrt{6}\pm3\sqrt{2}}{2}$ (←★偶数公式)

c は三角形の辺の長さであるから, $c>0$

ゆえに, $c=\frac{-\sqrt{6}+3\sqrt{2}}{2}$

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{ABC} &= \tfrac{1}{2}bc\sin\mathrm{A}\\ &= \tfrac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\tfrac{-\sqrt{6}+3\sqrt{2}}{2}\cdot\tfrac{1}{\sqrt{2}}\\ &= \mathbf{\dfrac{3\sqrt{3}-3}{4}}\end{aligned}$$

…答え

☆別解

★ 正弦定理 から $\sin\mathrm{B}\Rightarrow\mathrm{B}$ の特定 $\Rightarrow\mathrm{C}$

$\Rightarrow\ \frac{1}{2}ab\sin\mathrm{C}$

こちらの方が早いと思うが次の知識が必要.

$\sin 15^\circ=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$