反射テスト　三角比　三角形の面積　02

1.　次の $\triangle$ABC の面積を求めよ. ただし, $\mathrm{BC}=a$, $\mathrm{CA}=b$, $\mathrm{AB}=c$ とする.

（ S 級 1 分 10 秒, A 級 2 分, B 級 3 分 20 秒, C 級 5 分 ）

(1)　$\mathrm{A}=60^\circ$, $b=3$, $c=4$

(2)　$\mathrm{C}=45^\circ$, $a=b=\sqrt{6}$

(3)　$\cos\mathrm{B}=\dfrac{5}{13}$, $a=26$, $c=20$

(4)　$a=5$, $b=6$, $c=7$

2. 次の $\triangle$ABC の面積を求めよ．ただし，$\mathrm{BC}=a$，$\mathrm{CA}=b$，$\mathrm{AB}=c$ とする．

（ S 級 1 分 10 秒, A 級 2 分, B 級 3 分 20 秒, C 級 5 分 ）

(1) $\mathrm{A}=60^\circ$， $b=\sqrt{6}$， $c=2$

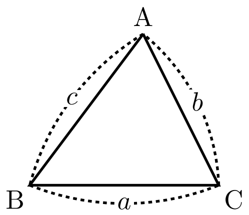
(2) $\mathrm{C}=30^\circ$， $a=b=\sqrt{10}$

(3) $\cos \mathrm{B}=\dfrac{8}{17}$， $a=34$， $c=15$

(4) $a=7$， $b=8$， $c=9$

反射テスト　三角比　三角形の面積　02　解答解説

1.　次の $\triangle\mathrm{ABC}$ の面積を求めよ．ただし，$\mathrm{BC}=a$，$\mathrm{CA}=b$，$\mathrm{AB}=c$ とする．
（S 級 1 分 10 秒，A 級 2 分，B 級 3 分 20 秒，C 級 5 分）



★ 三角形の面積　$\triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}bc\sin\mathrm{A}$

三角形の面積を求める公式である．文字を循環させて，

$\triangle\mathrm{ABC}=\dfrac{1}{2}bc\sin\mathrm{A}=\dfrac{1}{2}ca\sin\mathrm{B}=\dfrac{1}{2}ab\sin\mathrm{C}$

とも言える．左図のように，2 辺夾角相等をイメージするとよい．

(1)　$\mathrm{A}=60^\circ$，$b=3$，$c=4$

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{ABC}&=\tfrac{1}{2}bc\sin\mathrm{A}\\&=\tfrac{1}{2}\cdot3\cdot4\sin60^\circ\\&=\tfrac{1}{2}\cdot3\cdot4\cdot\tfrac{\sqrt{3}}{2}\\&=\mathbf{3\sqrt{3}}\end{aligned}$$
…**答え**

(2)　$\mathrm{C}=45^\circ$，$a=b=\sqrt{6}$

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{ABC}&=\tfrac{1}{2}ab\sin\mathrm{C}\\&=\tfrac{1}{2}\cdot\sqrt{6}^2\sin45^\circ\\&=\tfrac{1}{2}\cdot6\cdot\tfrac{1}{\sqrt{2}}\\&=\mathbf{\frac{3\sqrt{2}}{2}}\end{aligned}$$
…**答え**

(3)　$\cos\mathrm{B}=\dfrac{5}{13}$，$a=26$，$c=20$

$\cos\mathrm{B}=\frac{5}{13}$から，$\sin\mathrm{B}$ を求める．

$\sin^2\mathrm{B}+\cos^2\mathrm{B}=1$

$\sin^2\mathrm{B}+\left(\frac{5}{13}\right)^2=1$

$\Rightarrow\quad\sin^2\mathrm{B}=\frac{144}{169}$

$\Rightarrow\quad\sin\mathrm{B}=\pm\frac{12}{13}$

B は三角形の内角だから，$0^\circ<\mathrm{B}<180^\circ$

よって，$\sin\mathrm{B}>0$ より，

$\sin\mathrm{B}=\frac{12}{13}$

ゆえに，

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{ABC}&=\tfrac{1}{2}ca\sin\mathrm{B}\\&=\tfrac{1}{2}\cdot20\cdot26\cdot\tfrac{12}{13}\\&=\mathbf{240}\end{aligned}$$
…**答え**

(4)　$a=5$，$b=6$，$c=7$

★ 余弦定理 より，

$$\begin{aligned}\cos\mathrm{A}&=\tfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\\&=\tfrac{6^2+7^2-5^2}{2\cdot6\cdot7}\\&=\tfrac{36+49-25}{2\cdot6\cdot7}\\&=\tfrac{60}{2\cdot6\cdot7}\\&=\tfrac{5}{7}\end{aligned}$$

$\sin^2\mathrm{A}+\cos^2\mathrm{A}=1$

$\sin^2\mathrm{A}+\left(\frac{5}{7}\right)^2=1$

$\Rightarrow\quad\sin^2\mathrm{A}=\frac{24}{49}$

$\Rightarrow\quad\sin\mathrm{A}=\pm\frac{2\sqrt{6}}{7}$

A は三角形の内角だから，$0^\circ<\mathrm{A}<180^\circ$

よって，$\sin\mathrm{A}>0$ より，

$\sin\mathrm{A}=\frac{2\sqrt{6}}{7}$

ゆえに，

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{ABC}&=\tfrac{1}{2}bc\sin\mathrm{A}\\&=\tfrac{1}{2}\cdot6\cdot7\cdot\tfrac{2\sqrt{6}}{7}\\&=\mathbf{6\sqrt{6}}\end{aligned}$$
…**答え**

☆ヘロンの公式のほうが簡便だが，この解法ができれば
ヘロンの公式は覚える必要がない．

★ヘロンの公式

三辺の長さが a,b,c の三角形の面積は，

$\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$　　ただし $s=\dfrac{a+b+c}{2}$

2. 　次の $\triangle$ABC の面積を求めよ．ただし，BC $= a$，CA $= b$，AB $= c$ とする．

（ S 級 1 分 10 秒，A 級 2 分，B 級 3 分 20 秒，C 級 5 分 ）

(1)　$\mathrm{A} = 60°$，$b = \sqrt{6}$，$c = 2$

$$\begin{aligned}\triangle \mathrm{ABC} &= \tfrac{1}{2}bc\sin \mathrm{A} \\ &= \tfrac{1}{2}\cdot\sqrt{6}\cdot 2\sin 60° \\ &= \tfrac{1}{2}\cdot\sqrt{6}\cdot 2\cdot\tfrac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \boldsymbol{\frac{3\sqrt{2}}{2}}\end{aligned}$$ **…答え**

(2)　$\mathrm{C} = 30°$，$a = b = \sqrt{10}$

$$\begin{aligned}\triangle \mathrm{ABC} &= \tfrac{1}{2}ab\sin \mathrm{C} \\ &= \tfrac{1}{2}\cdot\sqrt{10}^2\sin 30° \\ &= \tfrac{1}{2}\cdot 10\cdot\tfrac{1}{2} \\ &= \boldsymbol{\frac{5}{2}}\end{aligned}$$ **…答え**

(3)　$\cos \mathrm{B} = \dfrac{8}{17}$，$a = 34$，$c = 15$

$\cos \mathrm{B} = \frac{8}{17}$から，$\sin \mathrm{B}$ を求める．

$\sin^2 \mathrm{B} + \cos^2 \mathrm{B} = 1$

$\sin^2 \mathrm{B} + \left(\frac{8}{17}\right)^2 = 1$

$\Rightarrow \quad \sin^2 \mathrm{B} = \frac{225}{289}$

$\Rightarrow \quad \sin \mathrm{B} = \pm\frac{15}{17}$

B は三角形の内角だから，$0° < \mathrm{B} < 180°$

よって，$\sin \mathrm{B} > 0$ より，

$\sin \mathrm{B} = \frac{15}{17}$

ゆえに，

$$\begin{aligned}\triangle \mathrm{ABC} &= \tfrac{1}{2}ca\sin \mathrm{B} \\ &= \tfrac{1}{2}\cdot 15\cdot 34\cdot\tfrac{15}{17} \\ &= \mathbf{225}\end{aligned}$$ **…答え**

(4)　$a = 7$，$b = 8$，$c = 9$

★ 余弦定理 より，

$$\begin{aligned}\cos \mathrm{A} &= \tfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \\ &= \tfrac{8^2+9^2-7^2}{2\cdot 8\cdot 9} \\ &= \tfrac{64+81-49}{2\cdot 8\cdot 9} \\ &= \tfrac{96}{2\cdot 8\cdot 9} \\ &= \tfrac{2}{3}\end{aligned}$$

$\sin^2 \mathrm{A} + \cos^2 \mathrm{A} = 1$

$\sin^2 \mathrm{A} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 1$

$\Rightarrow \quad \sin^2 \mathrm{A} = \frac{5}{9}$

$\Rightarrow \quad \sin \mathrm{A} = \pm\frac{\sqrt{5}}{3}$

A は三角形の内角だから，$0° < \mathrm{A} < 180°$

よって，$\sin \mathrm{A} > 0$ より，

$\sin \mathrm{A} = \frac{\sqrt{5}}{3}$

ゆえに，

$$\begin{aligned}\triangle \mathrm{ABC} &= \tfrac{1}{2}bc\sin \mathrm{A} \\ &= \tfrac{1}{2}\cdot 8\cdot 9\cdot\tfrac{\sqrt{5}}{3} \\ &= \mathbf{12\sqrt{5}}\end{aligned}$$ **…答え**

☆ヘロンの公式のほうが簡便だが，この解法ができれば
ヘロンの公式は覚える必要がない．