反射テスト　三角比　正弦定理と余弦定理　01

1.　△ABC があり，BC $= a$, CA $= b$, AB $= c$ とする. 次の問いに答えよ.（ S 級 3 分 40 秒, A 級 5 分, B 級 7 分, C 級 10 分 ）

(1)　$a = \sqrt{3}$ ，$b = \sqrt{2}$, $A = 120°$ のとき，
c ，B ，C を求めよ.

(2)　$A = 45°$, $b = \sqrt{6}$, $c = \sqrt{3} + 1$ のとき，
a ，B ，C を求めよ.

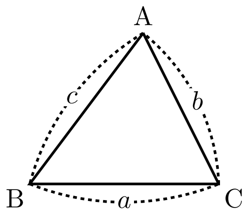
2. △ABC があり，BC $= a$，CA $= b$，AB $= c$ とする. 次の問いに答えよ.（S 級 5 分, A 級 7 分, B 級 10 分, C 級 15 分）

(1) $a = \sqrt{6}$，$b = \sqrt{3}$，$A = 135°$ のとき，
c，B，C を求めよ.

(2) $A = 30°$, $b = 3 + \sqrt{3}$, $c = 2\sqrt{3}$ のとき，
a，B，C を求めよ.

反射テスト　三角比　正弦定理と余弦定理　01　解答解説

1.　△ABC があり，$\mathrm{BC}=a$，$\mathrm{CA}=b$，$\mathrm{AB}=c$ とする. 次の問いに答えよ.（S 級 3 分 40 秒，A 級 5 分，B 級 7 分，C 級 10 分）



★ **正弦定理**…二角夾辺，もしくは二辺と夾角以外の角が判明

$$\frac{\boldsymbol{a}}{\sin \mathbf{A}}=\frac{\boldsymbol{b}}{\sin \mathbf{B}}=\frac{\boldsymbol{c}}{\sin \mathbf{C}}=\mathbf{2}\boldsymbol{R}$$

（R は △ABC の外接円の半径である.）

★ **余弦定理**（$\mathrm{A}a, \mathrm{B}b, \mathrm{C}c$ の循環で覚えよう）

① 二辺夾角が判明　$\boldsymbol{a^2=b^2+c^2-2bc\cos \mathrm{A}}$

② 三辺が判明　$\boldsymbol{\cos \mathrm{A}=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}$

(1)　$a=\sqrt{3}$，$b=\sqrt{2}$，$A=120^\circ$のとき，
c，B，C を求めよ.

三角形の内角は 0 度より大きく，180°より小さいので，
それらの正弦は 0 ではない.

★ **正弦定理** から，

$$\frac{a}{\sin \mathrm{A}}=\frac{b}{\sin \mathrm{B}}$$

$$\therefore\quad \frac{\sqrt{3}}{\sin 120^\circ}=\frac{\sqrt{2}}{\sin \mathrm{B}}$$

$$\Leftrightarrow\quad 2=\frac{\sqrt{2}}{\sin \mathrm{B}}$$

$$\Leftrightarrow\quad \sin \mathrm{B}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$0^\circ<\mathrm{B}<(180-120)^\circ \quad\Leftrightarrow\quad 0^\circ<\mathrm{B}<60^\circ$$

よって　$\mathbf{B=45^\circ}$　**…答え**

$\mathrm{C}=180-(120+45)=\mathbf{15^\circ}$　**…答え**

★ **余弦定理** から，　←☆

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos \mathrm{A}$$

$$\Leftrightarrow\quad \sqrt{3}^2=\sqrt{2}^2+c^2-2\cdot\sqrt{2}\cdot c\cdot\cos 120^\circ$$

$$\Leftrightarrow\quad 3=2+c^2+\sqrt{2}c$$

$$\Leftrightarrow\quad c^2+\sqrt{2}c-1=0$$

$$\Leftrightarrow\quad c=\frac{-\sqrt{2}\pm\sqrt{(\sqrt{2})^2-4\cdot 1\cdot(-1)}}{2}$$

$$\Leftrightarrow\quad c=\frac{-\sqrt{2}\pm\sqrt{6}}{2}$$

$c>0$ より　$\boldsymbol{c=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}}$　**…答え**

★ $\sin 15^\circ=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$
知っていれば，☆は正弦定理の方が早い.

(2)　$A=45^\circ$，$b=\sqrt{6}$，$c=\sqrt{3}+1$ のとき，
a，B，C を求めよ.

★ **余弦定理** より，

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos \mathrm{A}$$

$$a^2=(\sqrt{6})^2+(\sqrt{3}+1)^2-2\times\sqrt{6}\times(\sqrt{3}+1)\times\cos 45^\circ$$

$$a^2=6+(3+2\sqrt{3}+1)-2\sqrt{6}\cdot(\sqrt{3}+1)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$a^2=10+2\sqrt{3}-2\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)$$

$$a^2=10+2\sqrt{3}-6-2\sqrt{3}$$

$$a^2=4$$

$a>0$ より，$\boldsymbol{a=2}$　**…答え**

3 辺がわかったので，★ **余弦定理** より，

$$\cos \mathrm{B}=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}\qquad(\leftarrow☆)$$

$$=\frac{(\sqrt{3}+1)^2+2^2-(\sqrt{6})^2}{2(\sqrt{3}+1)\cdot 2}$$

$$=\frac{4+2\sqrt{3}+4-6}{4(\sqrt{3}+1)}$$

$$=\frac{2+2\sqrt{3}}{4(\sqrt{3}+1)}$$

$$=\frac{2(\sqrt{3}+1)}{4(\sqrt{3}+1)}$$

$$=\frac{1}{2}$$

$\Rightarrow$　$\mathbf{B=60^\circ}$　**…答え**

$\Rightarrow$　$\mathrm{C}=180-(45+60)=\mathbf{75^\circ}$　**…答え**

☆ポイント 1
$\cos \mathrm{C}$ について余弦定理を用いると，
$\cos \mathrm{C}=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$　$\Leftrightarrow$　$\mathrm{C}=75^\circ$
$\cos 75^\circ$の知識が必要になる.

3 辺と 1 角がわかれば正弦定理でも解けるが，
余弦定理で cos を求めたほうが一意に決まる.

2. $\triangle$ABC があり，BC $= a$, CA $= b$, AB $= c$ とする. 次の問いに答えよ.（S 級 5 分, A 級 7 分, B 級 10 分, C 級 15 分）

(1) $a = \sqrt{6}$, $b = \sqrt{3}$, $A = 135°$のとき，
c ， B ， C を求めよ.

三角形の内角は 0 度より大きく，180°より小さいので，
それらの正弦は 0 ではない.

★ **正弦定理** から，

$$\frac{a}{\sin \mathrm{A}} = \frac{b}{\sin \mathrm{B}}$$

$$\therefore \quad \frac{\sqrt{6}}{\sin 135°} = \frac{\sqrt{3}}{\sin \mathrm{B}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \sqrt{6}\cdot\sqrt{2} = \frac{\sqrt{3}}{\sin \mathrm{B}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin \mathrm{B} = \frac{1}{2}$$

$$0° < \mathrm{B} < (180-135)° \quad \Leftrightarrow \quad 0° < \mathrm{B} < 45°$$

よって　$\mathbf{B = 30°}$　**…答え**

$\mathrm{C} = 180 - (135+30) = \mathbf{15°}$　**…答え**

★ **余弦定理** から，　←☆

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos \mathrm{A}$$

$$\Leftrightarrow \quad \sqrt{6}^2 = \sqrt{3}^2 + c^2 - 2\cdot\sqrt{3}\cdot c\cdot\cos 135°$$

$$\Leftrightarrow \quad 6 = 3 + c^2 + \sqrt{6}c$$

$$\Leftrightarrow \quad c^2 + \sqrt{6}c - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad c = \frac{-\sqrt{6} \pm \sqrt{(\sqrt{6})^2 - 4\cdot 1\cdot(-3)}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad c = \frac{-\sqrt{6} \pm 3\sqrt{2}}{2}$$

$c > 0$ より　$\boldsymbol{c = \dfrac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}}$　**…答え**

★ $\sin 15° = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$
知っていれば，☆は正弦定理の方が早い.

(2) $A = 30°$, $b = 3+\sqrt{3}$, $c = 2\sqrt{3}$ のとき，
a ， B ， C を求めよ.

★ **余弦定理** より，

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos \mathrm{A}$$

$$a^2 = (3+\sqrt{3})^2 + (2\sqrt{3})^2 - 2\times(3+\sqrt{3})\times 2\sqrt{3}\times\cos 30°$$

$$a^2 = (9+6\sqrt{3}+3) + 12 - 4\sqrt{3}(3+\sqrt{3})\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$a^2 = 24 + 6\sqrt{3} - 6(3+\sqrt{3})$$

$$a^2 = 6$$

$a > 0$ より，$\boldsymbol{a = \sqrt{6}}$　**…答え**

3 辺がわかったので，★ **余弦定理** より，

$$\cos \mathrm{C} = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} \qquad (\leftarrow☆)$$

$$= \frac{\sqrt{6}^2 + (3+\sqrt{3})^2 - (2\sqrt{3})^2}{2\cdot\sqrt{6}\cdot(3+\sqrt{3})}$$

$$= \frac{6+12+6\sqrt{3}-12}{2\sqrt{6}(3+\sqrt{3})}$$

$$= \frac{6(1+\sqrt{3})}{6\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$\Rightarrow$　$\mathbf{C = 45°}$　**…答え**

$\Rightarrow$　$\mathrm{B} = 180 - (30+45) = \mathbf{105°}$　**…答え**

☆ポイント 1
$\cos \mathrm{B}$ について余弦定理を用いると，

$$\cos \mathrm{B} = -\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{B} = 105°$$

$\cos 105°$の知識が必要になる.

3 辺と 1 角がわかれば正弦定理でも解けるが，
余弦定理で cos を求めたほうが一意に決まる.