反射テスト　三角比　正接の補算　01

1.　$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ として, 次の問いに答えよ.　（ S 級 50 秒, A 級 1 分 45 秒, B 級 3 分, C 級 5 分 ）

(1)　$\cos\theta = \dfrac{4}{5}$ であるとき, $\tan\theta$ を求めよ.

(2)　$\sin\theta = \dfrac{\sqrt{6}}{4}$ であるとき, $\tan\theta$ を求めよ.

2. $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ として, 次の問いに答えよ. （ S 級 50 秒, A 級 1 分 45 秒, B 級 3 分, C 級 5 分 ）

（1） $\cos\theta = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ であるとき, $\tan\theta$ を求めよ.

（2） $\sin\theta = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$ であるとき, $\tan\theta$ を求めよ.

反射テスト　三角比　正接の補算　01　解答解説

1.　$0° \leqq \theta \leqq 180°$ として, 次の問いに答えよ.　（ S 級 50 秒, A 級 1 分 45 秒, B 級 3 分, C 級 5 分 ）

★ $\boldsymbol{\tan^2\theta + 1 = \dfrac{1}{\cos^2\theta}}$ **と** $\boldsymbol{\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}}$

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ の両辺を $\cos^2\theta$ で割ると，この式を求めることができる.

この式を使えば，cos から，tan を求めることができる.

条件があるときは，以下に注意する.

$$\begin{cases} 0° < \theta < 90° & \Rightarrow \quad \tan\theta > 0 \\ 90° < \theta < 180° & \Rightarrow \quad \tan\theta < 0 \end{cases}$$

もしくは，$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ を使って，sin と cos の両方を求めて，$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ より，tan を求めてもよい.

（ 最初から sin と cos の両方がわかっている場合や，sin のみわかっている場合は，こちらを用いたほうが計算が早い. ）

(1)　$\cos\theta = \dfrac{4}{5}$ であるとき, $\tan\theta$ を求めよ.

$0° \leqq \theta \leqq 180°$　かつ　$0 < \cos\theta < 1$　より, $0° < \theta < 90°$.

$$\begin{aligned} & \tan^2\theta + 1 = \frac{1}{\cos^2\theta} \\ \Rightarrow\ & \tan^2\theta + 1 = \frac{1}{\left(\frac{4}{5}\right)^2} \\ \Leftrightarrow\ & \tan^2\theta = \left(\tfrac{5}{4}\right)^2 - 1 \qquad \leftarrow ☆\ \frac{1}{\frac{b}{a}} = 1 \div \frac{b}{a} = \frac{a}{b} \\ \Leftrightarrow\ & \tan^2\theta = \tfrac{25}{16} - 1 \\ \Leftrightarrow\ & \tan^2\theta = \tfrac{9}{16} \end{aligned}$$

$0° < \theta < 90°$ から, $\tan\theta > 0$ であるから,

$$\boldsymbol{\tan\theta = \frac{3}{4}}$$

(2)　$\sin\theta = \dfrac{\sqrt{6}}{4}$ であるとき, $\tan\theta$ を求めよ.

$0° \leqq \theta \leqq 180°$　かつ　$0 < \sin\theta < 1$　より, $0° < \theta < 180°$.

$$\begin{aligned} & \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \\ \Rightarrow\ & \left(\tfrac{\sqrt{6}}{4}\right)^2 + \cos^2\theta = 1 \\ \Leftrightarrow\ & \tfrac{6}{16} + \cos^2\theta = 1 \\ \Leftrightarrow\ & \cos^2\theta = 1 - \tfrac{6}{16} \\ \Leftrightarrow\ & \cos^2\theta = \tfrac{10}{16} \\ \Leftrightarrow\ & \cos\theta = \pm\frac{\sqrt{10}}{4} \end{aligned}$$

$0° < \theta < 180°$ より, $\cos\theta$ は正負どちらもありえる.

$$\begin{aligned} \tan\theta &= \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \\ &= \frac{\frac{\sqrt{6}}{4}}{\pm\frac{\sqrt{10}}{4}} \\ &= \pm\tfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{10}} \qquad \leftarrow \text{分母分子} \times 4 \\ &= \boldsymbol{\pm\frac{\sqrt{15}}{5}} \end{aligned}$$

2. $0° \leqq \theta \leqq 180°$ として, 次の問いに答えよ. （ S 級 50 秒, A 級 1 分 45 秒, B 級 3 分, C 級 5 分 ）

(1) $\cos\theta = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ であるとき, $\tan\theta$ を求めよ.

$0° \leqq \theta \leqq 180°$ かつ $-1 < \cos\theta < 0$ より, $90° < \theta < 180°$.

$$\tan^2\theta + 1 = \frac{1}{\cos^2\theta}$$

$$\Rightarrow \quad \tan^2\theta + 1 = \frac{1}{\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \tan^2\theta = \left(\frac{3}{\sqrt{3}}\right)^2 - 1 \qquad \leftarrow ☆\ \frac{1}{\frac{b}{a}} = 1 \div \frac{b}{a} = \frac{a}{b}$$

$$\Leftrightarrow \quad \tan^2\theta = \frac{9}{3} - 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \tan^2\theta = 2$$

$90° < \theta < 180°$ から, $\tan\theta < 0$ であるから,

$$\boldsymbol{\tan\theta = -\sqrt{2}}$$

(2) $\sin\theta = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$ であるとき, $\tan\theta$ を求めよ.

$0° \leqq \theta \leqq 180°$ かつ $0 < \sin\theta < 1$ より, $0° < \theta < 180°$.

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2 + \cos^2\theta = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{5}{9} + \cos^2\theta = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos^2\theta = 1 - \frac{5}{9}$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos^2\theta = \frac{4}{9}$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos\theta = \pm\frac{2}{3}$$

$0° < \theta < 180°$ より, $\cos\theta$ は正負どちらもありえる.

$$\begin{aligned} \tan\theta &= \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \\ &= \frac{\frac{\sqrt{5}}{3}}{\pm\frac{2}{3}} \\ &= \boldsymbol{\pm\frac{\sqrt{5}}{2}} \qquad \leftarrow \text{分母分子} \times 3 \end{aligned}$$