

反射テスト 論理 背理法 「無理数」の証明 01

1. 次の命題を証明せよ。(S級3分40秒, A級5分30秒, B級8分, C級12分)

命題 「 $\sqrt{2}$ は無理数である。」

2. 次の命題を証明せよ。(S級4分20秒, A級6分30秒, B級10分, C級15分)

命題 「 $\sqrt[3]{2}$ は無理数である。」

反射テスト 論理 背理法 「無理数」の証明 01 解答解説

1. 次の命題を証明せよ。(S級3分40秒, A級5分30秒, B級8分, C級12分)

命題 「 $\sqrt{2}$ は無理数である。」

★ 背理法

- ① 結論の否定を仮定する.
- ② ①から矛盾を導く.
- ③ 仮定①が否定されて、命題が証明される.

★ 互いに素 最大公約数が1であること.

証明

$\sqrt{2}$ が無理数ではないと仮定すると、 $\sqrt{2}$ は有理数. 互いに素の整数 p, q を用いて、次のように表せる..

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \quad (\text{ただし, } q \neq 0 \text{ である.})$$

$$\Leftrightarrow 2q^2 = p^2$$

すなわち、 p^2 は偶数であるから、 p は偶数となる. なぜならば、対偶「 p が奇数ならば、 p^2 は奇数である。」が真.

整数 m を用いて、 $p = 2m$ とおくと、

$$2q^2 = (2m)^2 \Leftrightarrow 2q^2 = 4m^2 \Leftrightarrow q^2 = 2m^2$$

同様に考えられるので、 q^2 は偶数 \Rightarrow q は偶数である.

したがって、 p, q がともに偶数となって、 p, q が互いに素であることに矛盾する.

背理法より、仮定は否定されるから、 $\sqrt{2}$ は無理数である.

2. 次の命題を証明せよ。(S級4分20秒, A級6分30秒, B級10分, C級15分)

命題 「 $\sqrt[3]{2}$ は無理数である。」

証明

$\sqrt[3]{2}$ が無理数ではないと仮定すると, $\sqrt[3]{2}$ は有理数. 互いに素の整数 p, q を用いて, 次のように表せる..

$$\sqrt[3]{2} = \frac{p}{q} \quad (\text{ただし, } q \neq 0 \text{ である.})$$

$$\Leftrightarrow 2q^3 = p^3$$

すなわち, p^3 は偶数であるから, p は偶数となる. なぜならば, 対偶「 p が奇数ならば, p^3 は奇数である。」が真.

整数 m を用いて, $p = 2m$ とおくと,

$$2q^3 = (2m)^3 \Leftrightarrow 2q^3 = 8m^3 \Leftrightarrow q^3 = 4m^3 \quad \text{よって, } q^3 \text{ は偶数}$$

「 q が奇数ならば, q^3 は奇数である。」の対偶から, 「 q^3 が偶数ならば, q は偶数である。」

したがって, p, q がともに偶数となって, p, q が互いに素であることに矛盾する.

背理法より, 仮定は否定されるから, $\sqrt[3]{2}$ は無理数である.

☆京大理系 H24 年に同じ問題あり.