反射テスト　論理　背理法　「互いに素」の証明　01

1.　次の命題を背理法を用いて証明せよ.（ S 級 3 分, A 級 5 分, B 級 7 分, C 級 10 分 ）
命題「 整数 m, n があって, m, n が互いに素であるとき, $m+n$, m は互いに素である. 」

2. 　次の命題を背理法を用いて証明せよ．(S 級 3 分 20 秒，A 級 5 分 30 秒，B 級 8 分，C 級 12 分)

命題「 整数 m, n, x があって，m, n が互いに素であるとき，$mx + n$, m は互いに素である．」

反射テスト　論理　背理法　「互いに素」の証明　01　解答解説

1.　次の命題を背理法を用いて証明せよ.（ S 級 3 分, A 級 5 分, B 級 7 分, C 級 10 分 ）
命題「 整数 m, n があって, m, n が互いに素であるとき, $m+n\,, m$ は互いに素である.」

★ 背理法
①　結論の否定を仮定する.
②　①から矛盾を導く.
③　仮定①が否定されて, 命題が証明される.

★ 互いに素　最大公約数が 1 であること.

証明

$m+n\,, m$ が互いに素ではないと仮定する.

$m+n\,, m$ は互いに素ではないから, 2 以上の最大公約数をもつので, これを g とする.

$m+n=ga$, $m=gb$ とおく. ただし, a, b は互いに素な整数とする.

この 2 つの差を考えると, $(m+n)-m=ga-gb \quad \Leftrightarrow \quad n=g(a-b)$

$a-b$ は整数であるから, n は 2 以上の整数 g で割りきれることになるが, $m=gb$ より, m も g で割りきれるので, 命題の「 m, n が互いに素 」に矛盾する.

背理法により, 仮定「 $m+n\,, m$ が互いに素ではない 」は否定される. すなわち, $m+n\,, m$ は互いに素である.

2. 次の命題を背理法を用いて証明せよ.（ S 級 3 分 20 秒, A 級 5 分 30 秒, B 級 8 分, C 級 12 分 ）
命題「 整数 m, n, x があって, m, n が互いに素であるとき, $mx+n\,, m$ は互いに素である.」

証明

$mx+n\,, m$ が互いに素ではないと仮定する.

$mx+n\,, m$ は互いに素ではないから, 2 以上の最大公約数をもつので, これを g とする.

$mx+n=ga$, $m=gb$ とおく. ただし, a, b は互いに素な整数とする.

後者を前者に代入して, $gbx+n=ga \quad \Leftrightarrow \quad n=g(a-bx)$

$a-bx$ は整数であるから, n は 2 以上の整数 g で割りきれることになるが, $m=gb$ より, m も g で割りきれるので, 命題の「 m, n が互いに素 」に矛盾する.

背理法により, 仮定「 $mx+n\,, m$ が互いに素ではない 」は否定される. すなわち, $mx+n\,, m$ は互いに素である.