

反射テスト 論理 対偶の証明 01

1. 次の命題を対偶を用いて証明せよ。(S級2分10秒, A級3分40秒, B級5分, C級7分)

命題「整数 x, y があって、 $x^2 + y^2 = 0$ ならば、 $x = 0$ かつ $y = 0$ である。」

2. 次の命題を対偶を用いて証明せよ。(S級2分40秒, A級4分, B級6分, C級8分)

命題「自然数 n に対して, n^2 が3の倍数ならば, n は3の倍数である。」

反射テスト 論理 対偶の証明 01 解答解説

1. 次の命題を対偶を用いて証明せよ。(S級2分10秒, A級3分40秒, B級5分, C級7分)

命題「整数 x, y があって、 $x^2 + y^2 = 0$ ならば、 $x = 0$ かつ $y = 0$ である。」

★対偶

命題 P 「 $A \Rightarrow B$ 」に対して、命題「 B の否定 $\Rightarrow A$ の否定」を命題 P の**対偶**という。

★「命題 P が真」 \Leftrightarrow 「P の対偶が真」 (最重要)

命題 P の真偽と P の対偶の真偽は等しい。(真偽が等しいことを**同値**という。)つまり、命題とその対偶は同値であり、命題 P を証明したいときは、その対偶を証明してもよい。この性質があるため、対偶は証明手段の1つになる。実際、大学入試問題では、数学的帰納法、背理法に次いで重要な証明方法といえる。

命題の対偶「整数 x, y があって、 $x \neq 0$ または $y \neq 0$ ならば、 $x^2 + y^2 \neq 0$ である。」

証明

$x \neq 0$ のとき、

$$x^2 > 0 \text{ であるから、たとえ } y = 0 \text{ であっても、} x^2 + y^2 > 0 \Rightarrow x^2 + y^2 \neq 0$$

$y \neq 0$ のとき、

$$y^2 > 0 \text{ であるから、たとえ } x = 0 \text{ であっても、} x^2 + y^2 > 0 \Rightarrow x^2 + y^2 \neq 0$$

どちらの場合も対偶が真あることが証明された。ゆえに、命題も真である。

2. 次の命題を対偶を用いて証明せよ。(S級2分40秒, A級4分, B級6分, C級8分)

命題「自然数 n に対して, n^2 が3の倍数ならば, n は3の倍数である。」

命題の対偶「自然数 n に対して, n が3の倍数でなければ, n^2 は3の倍数ではない。」

証明

n は3の倍数ではないから, ある整数 m を用いて, $n = 3m + 1$ 又は $n = 3m + 2$ と表すことができる.

$$n = 3m + 1 \Rightarrow n^2 = (3m + 1)^2 = 9m^2 + 6m + 1 = 3(3m^2 + 2m) + 1$$

$$n = 3m + 2 \Rightarrow n^2 = (3m + 2)^2 = 9m^2 + 12m + 4 = 3(3m^2 + 4m + 1) + 1$$

どちらも3の倍数ではないから, 対偶が真であることが証明された. ゆえに, 命題も真である.