

## 反射テスト 論理 命題真偽 01

1. 次の命題の真偽を言え. また, 偽である場合は反例をあげよ. ( S級 1分 10秒, A級 1分 40秒, B級 2分 20秒, C級 3分 )

(1) 命題 「  $x^2 = 9$  ならば  $x = 3$  である 」

(2) 命題 「  $ab = 0$  ならば  $a = 0$  である 」

(3) 命題 「  $x \geq 0$  ならば  $x^2 \geq 0$  」

(4) 命題 「  $x = 1$  ならば  $x^2 + x - 2 = 0$  」

(5) 命題 「  $a = b \Rightarrow \frac{a}{b} + \frac{b}{a} = 2$  」

(6) 命題 「  $ab < 0$  ならば,  $a > 0$  かつ  $b < 0$  」

(7) 命題 「四角形の4つの辺の長さが等しければ,  
その四角形は正方形である. 」

(8) 命題 「整数  $m$  がある.  $m^2$  が偶数ならば,  
 $m$  は偶数である 」

2. 次の命題の真偽を言え. また, 偽である場合は反例をあげよ. ( S 級 1 分 20 秒, A 級 1 分 50 秒, B 級 2 分 20 秒, C 級 3 分 )

(1) 命題 「  $x < 0$  ならば  $x^2 \geq 0$  である 」

(2) 命題 「  $a^2 = b^2$  であるならば  $a = b$  である 」

(3) 命題 「  $x + y = 0$  ならば  $x^2 = y^2$  」

(4) 命題 「 整数  $m, n$  が  $mn = 12$  を満たせば,  
 $m$  と  $n$  は互いに素である 」

(5) 命題 「  $x = 2$  ならば  $ax = 2a$  」

(6) 命題 「  $a = b$  かつ  $c \neq 0$  ならば,  $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$  」

(7) 命題 「  $l, m$  を空間内の直線とするとき,  
異なる 2 直線  $l, m$  が交わっているならば,  
2 直線  $l, m$  は同じ平面上にある 」

(8) 命題 「  $a, b$  が整数であるとき,  $a < b \Rightarrow a^2 < b^2$  」

# 反射テスト 論理 命題真偽 01 解答解説

1. 次の命題の真偽を言え。また、偽である場合は反例をあげよ。(S級1分10秒, A級1分40秒, B級2分20秒, C級3分)

## ★命題

正しいか正しくないかを言及できる文を「命題」という。

## ★真偽

命題が成り立つことを「この命題は真である」といい、成り立たないことを「この命題は偽である」という。

## ★反例

反例とは、「AならばBである」のAの条件は満たすが、Bを満たさない事象をいう。命題が偽であることは、反例を1つあげればよい。

## ★論理記号

「 $A \Rightarrow B$ 」 「AならばBである」と同じ意味。このとき、Aを仮定、Bを結論という。

「 $A \Leftrightarrow B$ 」 「 $A \Rightarrow B$ 」かつ「 $B \Rightarrow A$ 」

★補足 「～のとき、 $A \Rightarrow B$ 」条件「～のとき」は、仮定と結論両方にかかる。

(1) 命題「 $x^2 = 9$ ならば $x = 3$ である」

⇔ 「 $x = \pm 3 \Rightarrow x = 3$ 」

これは偽である。

反例  $x = -3$ のとき。

(2) 命題「 $ab = 0$ ならば $a = 0$ である」

これは偽である。

反例  $a = 2$ かつ $b = 0$ のとき。

$ab = 0$ だが、 $a \neq 0$ である。

☆  $a \neq 0$ かつ $b = 0$ のときをいえばよい。

(3) 命題「 $x \geq 0$ ならば $x^2 \geq 0$ 」

これは真である。

☆  $x < 0$ のときも $x^2 \geq 0$ であるが考える必要はない。

(4) 命題「 $x = 1$ ならば $x^2 + x - 2 = 0$ 」

これは真である。

$x = 1$ を $x^2 + x - 2$ に代入すると $1^2 + 1 - 2 = 0$

(5) 命題「 $a = b \Rightarrow \frac{a}{b} + \frac{b}{a} = 2$ 」

これは偽である。

反例  $a = b = 0$ のとき。

分母が0になるので、 $\frac{a}{b}$ や $\frac{b}{a}$ が値をとれない。

(6) 命題「 $ab < 0$ ならば、 $a > 0$ かつ $b < 0$ 」

これは偽である。

反例  $a = -1$ かつ $b = 1$ のとき。

$ab = -1$ より仮定は満たすが、  
 $a < 0$ かつ $b > 0$ より結論は満たさない。

☆  $a < 0$ かつ $b > 0$ のときをいえばよい。

(7) 命題「四角形の4つの辺の長さが等しければ、その四角形は正方形である。」

これは偽である。

反例 正方形ではないひし形。

## ★四角形の定義

ひし形…4つの辺の長さが等しい四角形。

長方形…4つの内角が等しい四角形。

正方形…ひし形かつ長方形。

(8) 命題「整数 $m$ がある。 $m^2$ が偶数ならば、 $m$ は偶数である」

これは真である。

対偶を証明すれば、この命題も真であることがわかる。

命題⇔命題の対偶 「 $m$ が奇数 $\Rightarrow m^2$ が奇数」

## ★対偶(命題と対偶の真偽は一致する)

「 $A \Rightarrow B$ 」の対偶は「 $B$ の否定 $\Rightarrow A$ の否定」

2. 次の命題の真偽を言え. また, 偽である場合は反例をあげよ. ( S 級 1 分 20 秒, A 級 1 分 50 秒, B 級 2 分 20 秒, C 級 3 分 )

(1) 命題 「  $x < 0$  ならば  $x^2 \geq 0$  である 」

これは **真** である.

$x$  が実数ならば, どんなときも  $x^2 \geq 0$

(2) 命題 「  $a^2 = b^2$  であるならば  $a = b$  である 」

これは **偽** である.

**反例**  $a = 1$  かつ  $b = -1$  のとき.

$a^2 = b^2 = 1$  であるが,  $a \neq b$  である.

☆  $a = -b$  のときから 1 つ例をとればよい.

(3) 命題 「  $x + y = 0$  ならば  $x^2 = y^2$  」

これは **真** である.

$x + y = 0 \Rightarrow x = -y \Rightarrow x^2 = (-y)^2$

(4) 命題 「 整数  $m, n$  が  $mn = 12$  を満たせば,  
 $m$  と  $n$  は互いに素である 」

これは **偽** である.

**反例**  $m = 2$  かつ  $n = 6$  のとき.

$mn = 12$  ではあるが,  $m$  と  $n$  は互いに素ではない.

★互いに素

「  $A$  と  $B$  が互いに素 」  $\Leftrightarrow$  「  $A$  と  $B$  の最大公約数が 1 」

(5) 命題 「  $x = 2$  ならば  $ax = 2a$  」

これは **真** である.

$x = 2$  を代入すると  $2a = 2a$

(6) 命題 「  $a = b$  かつ  $c \neq 0$  ならば,  $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$  」

これは **真** である.

$c \neq 0$  より, 両辺  $\div c$  が可能.

(7) 命題 「  $l, m$  を空間内の直線とすると,  
異なる 2 直線  $l, m$  が交わっているならば,  
2 直線  $l, m$  は同じ平面上にある 」

これは **真** である.

空間上に  $\times$  (バツテン) をイメージしてみよう.

$\times$  にぴったりと板 (平面) を貼ることができる.

(8) 命題 「  $a, b$  が整数であるとき,  $a < b \Rightarrow a^2 < b^2$  」

これは **偽** である.

**反例**  $a = -2$  かつ  $b = 1$  のとき.

仮定は満たすが,  $a^2 > b^2$  となって結論は満たさない.