

反射テスト 論理 命題真偽 01

1. 次の命題の真偽を言え. また, 偽である場合は反例をあげよ. (S 級 1 分 10 秒, A 級 1 分 40 秒, B 級 2 分 20 秒, C 級 3 分)

(1) 命題 「 $x^2 = 9$ ならば $x = 3$ である 」

(2) 命題 「 $ab = 0$ ならば $a = 0$ である 」

(3) 命題 「 $x \geq 0$ ならば $x^2 \geq 0$ 」

(4) 命題 「 $x = 1$ ならば $x^2 + x - 2 = 0$ 」

(5) 命題 「 $a = b \Rightarrow \frac{a}{b} + \frac{b}{a} = 2$ 」

(6) 命題 「 $ab < 0$ ならば, $a > 0$ かつ $b < 0$ 」

(7) 命題 「四角形の 4 つの辺の長さが等しければ,
その四角形は正方形である. 」

(8) 命題 「整数 m がある. m^2 が偶数ならば,
 m は偶数である 」

2. 次の命題の真偽を言え. また, 偽である場合は反例をあげよ. (S 級 1 分 20 秒, A 級 1 分 50 秒, B 級 2 分 20 秒, C 級 3 分)

(1) 命題 「 $x < 0$ ならば $x^2 \geq 0$ である 」

(2) 命題 「 $a^2 = b^2$ であるならば $a = b$ である 」

(3) 命題 「 $x + y = 0$ ならば $x^2 = y^2$ 」

(4) 命題 「 整数 m, n が $mn = 12$ を満たせば,
 m と n は互いに素である 」

(5) 命題 「 $x = 2$ ならば $ax = 2a$ 」

(6) 命題 「 $a = b$ かつ $c \neq 0$ ならば, $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$ 」

(7) 命題 「 l, m を空間内の直線とするとき,
異なる 2 直線 l, m が交わっているならば,
2 直線 l, m は同じ平面上にある 」

(8) 命題 「 a, b が整数であるとき, $a < b \Rightarrow a^2 < b^2$ 」

反射テスト 論理 命題真偽 01 解答解説

1. 次の命題の真偽を言え。また、偽である場合は反例をあげよ。(S級1分10秒, A級1分40秒, B級2分20秒, C級3分)

★命題

正しいか正しくないかを言及できる文を「命題」という。

★真偽

命題が成り立つことを「この命題は真である」といい、成り立たないことを「この命題は偽である」という。

★反例

反例とは、「AならばBである」のAの条件は満たすが、Bを満たさない事象をいう。命題が偽であることは、反例を1つあげればよい。

★論理記号

「 $A \Rightarrow B$ 」 「AならばBである」と同じ意味。このとき、Aを仮定、Bを結論という。

「 $A \Leftrightarrow B$ 」 「 $A \Rightarrow B$ 」かつ「 $B \Rightarrow A$ 」

★補足 「～のとき、 $A \Rightarrow B$ 」条件「～のとき」は、仮定と結論両方にかかる。

(1) 命題「 $x^2 = 9$ ならば $x = 3$ である」

⇔ 「 $x = \pm 3 \Rightarrow x = 3$ 」

これは偽である。

反例 $x = -3$ のとき。

(2) 命題「 $ab = 0$ ならば $a = 0$ である」

これは偽である。

反例 $a = 2$ かつ $b = 0$ のとき。

$ab = 0$ だが、 $a \neq 0$ である。

☆ $a \neq 0$ かつ $b = 0$ のときをいえばよい。

(3) 命題「 $x \geq 0$ ならば $x^2 \geq 0$ 」

これは真である。

☆ $x < 0$ のときも $x^2 \geq 0$ であるが考える必要はない。

(4) 命題「 $x = 1$ ならば $x^2 + x - 2 = 0$ 」

これは真である。

$x = 1$ を $x^2 + x - 2$ に代入すると $1^2 + 1 - 2 = 0$

(5) 命題「 $a = b \Rightarrow \frac{a}{b} + \frac{b}{a} = 2$ 」

これは偽である。

反例 $a = b = 0$ のとき。

分母が0になるので、 $\frac{a}{b}$ や $\frac{b}{a}$ が値をとれない。

(6) 命題「 $ab < 0$ ならば、 $a > 0$ かつ $b < 0$ 」

これは偽である。

反例 $a = -1$ かつ $b = 1$ のとき。

$ab = -1$ より仮定は満たすが、
 $a < 0$ かつ $b > 0$ より結論は満たさない。

☆ $a < 0$ かつ $b > 0$ のときをいえばよい。

(7) 命題「四角形の4つの辺の長さが等しければ、その四角形は正方形である。」

これは偽である。

反例 正方形ではないひし形。

★四角形の定義

ひし形…4つの辺の長さが等しい四角形。

長方形…4つの内角が等しい四角形。

正方形…ひし形かつ長方形。

(8) 命題「整数 m がある。 m^2 が偶数ならば、 m は偶数である」

これは真である。

対偶を証明すれば、この命題も真であることがわかる。

命題⇔命題の対偶 「 m が奇数 $\Rightarrow m^2$ が奇数」

★対偶(命題と対偶の真偽は一致する)

「 $A \Rightarrow B$ 」の対偶は「 B の否定 $\Rightarrow A$ の否定」

2. 次の命題の真偽を言え. また, 偽である場合は反例をあげよ. (S級1分20秒, A級1分50秒, B級2分20秒, C級3分)

(1) 命題「 $x < 0$ ならば $x^2 \geq 0$ である」

これは **真** である.

x が実数ならば, どんなときも $x^2 \geq 0$

(2) 命題「 $a^2 = b^2$ であるならば $a = b$ である」

これは **偽** である.

反例 $a = 1$ かつ $b = -1$ のとき.

$a^2 = b^2 = 1$ であるが, $a \neq b$ である.

☆ $a = -b$ のときから1つ例をとればよい.

(3) 命題「 $x + y = 0$ ならば $x^2 = y^2$ 」

これは **真** である.

$x + y = 0 \Rightarrow x = -y \Rightarrow x^2 = (-y)^2$

(4) 命題「整数 m, n が $mn = 12$ を満たせば,
 m と n は互いに素である」

これは **偽** である.

反例 $m = 2$ かつ $n = 6$ のとき.

$mn = 12$ ではあるが, m と n は互いに素ではない.

★互いに素

「 A と B が互いに素」 \Leftrightarrow 「 A と B の最大公約数が1」

(5) 命題「 $x = 2$ ならば $ax = 2a$ 」

これは **真** である.

$x = 2$ を代入すると $2a = 2a$

(6) 命題「 $a = b$ かつ $c \neq 0$ ならば, $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$ 」

これは **真** である.

$c \neq 0$ より, 両辺 $\div c$ が可能.

(7) 命題「 l, m を空間内の直線とすると,
異なる2直線 l, m が交わっているならば,
2直線 l, m は同じ平面上にある」

これは **真** である.

空間上に× (バツェン) をイメージしてみよう.

×にぴったりと板 (平面) を貼ることができる.

(8) 命題「 a, b が整数であるとき, $a < b \Rightarrow a^2 < b^2$ 」

これは **偽** である.

反例 $a = -2$ かつ $b = 1$ のとき.

仮定は満たすが, $a^2 > b^2$ となって結論は満たさない.