

反射テスト 不等式 無理数不等式 01

1. 実数 x について次の不等式を解け。(S級 2分, A級 3分 20秒, B級 5分, C級 7分)

(1) $\sqrt{x+1} \leq x$

(2) $\sqrt{2-x} \geq x$

2. 実数 x について次の不等式を解け. (S 級 2 分 30 秒, A 級 4 分, B 級 6 分, C 級 9 分)

(1) $\sqrt{2x-1} < x$

(2) $\sqrt{3-2x} > x+1$

反射テスト 不等式 無理数不等式 01 解答解説

1. 実数 x について次の不等式を解け。(S級2分, A級3分20秒, B級5分, C級7分)

★無理数不等式

最初に注意すべきことが2つある.

1つは $\sqrt{\quad}$ 自体が必ず0以上の実数であるということ. もう1つは $\sqrt{\quad}$ 内が0以上の実数であること.

① $\sqrt{\quad}$ 自体が必ず0以上 \Rightarrow 不等式の形をみて, 必要な不等式を作る.

② $\sqrt{\quad}$ 内が0以上の実数 \Rightarrow そうでなければ虚数となり, 不等号で比べることができない。(★虚数に大小はない.)

この2点に気を付けながら, 両辺が0以上のとき, 両辺を2乗して $\sqrt{\quad}$ を処理する.

例1 $\sqrt{A} \leq B \Leftrightarrow$ 「 $A \geq 0$ かつ $B \geq 0$ かつ $A \leq B^2$ 」

まず不等号の形から $A \geq 0$ である. このとき左辺は0以上だから, $B \geq 0$. この2つの条件をふまえれば, 両辺を2乗できる.

例2 $\sqrt{A} \geq B \Leftrightarrow$ 「 $A \geq 0$ かつ $B < 0$ 」又は「 $A \geq 0$ かつ $B \geq 0$ かつ $A > B^2$ 」

まず不等号の形から $A \geq 0$ である. 左辺は0以上だから, 右辺が負ならこの不等式は必ず成立する. また, 右辺が0以上であるときは, 両辺ともに正なので2乗して $\sqrt{\quad}$ を外せる.

☆数3Cで無理関数を学んだ方は, グラフを描いて考えた方が早いかもしれない. ただはどちらでもできることが望ましい. 上のような代数的解法は平方根や方程式不等式の深い理解の助けになるし, そうやってしか解けない場合もある.

(1) $\sqrt{x+1} \leq x$

$$\Leftrightarrow x+1 \geq 0 \text{ かつ } x \geq 0 \text{ かつ } x+1 \leq x^2$$

$$\Leftrightarrow x \geq 0 \text{ かつ } x^2 - x - 1 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x \geq 0 \text{ かつ } \left[x \leq \frac{1-\sqrt{5}}{2} \text{ 又は } \frac{1+\sqrt{5}}{2} \leq x \right]$$

$$\Leftrightarrow x \geq 0 \text{ かつ } \left[x \leq \frac{1-\sqrt{5}}{2} \text{ 又は } \frac{1+\sqrt{5}}{2} \leq x \right]$$

$$\Leftrightarrow x \geq \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \dots\text{答え}$$

(2) $\sqrt{2-x} \geq x$

$$\Leftrightarrow \left[2-x \geq 0 \text{ かつ } x < 0 \right] \text{ 又は } \left[2-x \geq 0 \text{ かつ } x \geq 0 \text{ かつ } 2-x \geq x^2 \right]$$

$$\Leftrightarrow \left[x \leq 2 \text{ かつ } x < 0 \right] \text{ 又は } \left[0 \leq x \leq 2 \text{ かつ } (x+2)(x-1) \leq 0 \right]$$

$$\Leftrightarrow \left[x < 0 \right] \text{ 又は } \left[0 \leq x \leq 2 \text{ かつ } -2 \leq x \leq 1 \right]$$

$$\Leftrightarrow \left[x < 0 \right] \text{ 又は } \left[0 \leq x \leq 1 \right]$$

$$\Leftrightarrow x \leq 1 \quad \dots\text{答え}$$

2. 実数 x について次の不等式を解け。(S 級 2 分 30 秒, A 級 4 分, B 級 6 分, C 級 9 分)

(1) $\sqrt{2x-1} < x$

$\Leftrightarrow 2x-1 \geq 0$ かつ $x \geq 0$ かつ $2x-1 < x^2$

$\Leftrightarrow x \geq \frac{1}{2}$ かつ $x^2 - 2x + 1 > 0$

$\Leftrightarrow x \geq \frac{1}{2}$ かつ $(x-1)^2 > 0$

$\Leftrightarrow x \geq \frac{1}{2}$ かつ $x \neq 1$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq x < 1$ 又は $1 < x$ …答え

(2) $\sqrt{3-2x} > x+1$

\Leftrightarrow 「 $3-2x \geq 0$ かつ $x+1 < 0$ 」又は「 $3-2x \geq 0$ かつ $x+1 \geq 0$ かつ $3-2x > (x+1)^2$ 」

\Leftrightarrow 「 $x \leq \frac{3}{2}$ かつ $x < -1$ 」又は「 $x \leq \frac{3}{2}$ かつ $x \geq -1$ かつ $x^2 + 4x - 2 < 0$ 」

\Leftrightarrow 「 $x < -1$ 」又は「 $-1 \leq x \leq \frac{3}{2}$ かつ $-2 - \sqrt{6} < x < -2 + \sqrt{6}$ 」

\Leftrightarrow 「 $x < -1$ 」又は「 $-1 \leq x < -2 + \sqrt{6}$ 」

$\Leftrightarrow x < -2 + \sqrt{6}$ …答え