反射テスト　場合の数・確率　条件付き確率　02

1.　次の確率を求めよ. (S 級 1 分, A 級 1 分 50 秒, B 級 3 分, C 級 5 分)

(1)　表に $1, 2, 3$ と書かれたカードが 3 枚伏せられている. 裏は見分けがつかない. 1 枚めくってそれが奇数であるとき, 2 枚目をめくって偶数を引く確率を求めよ.

(2)　コイン 2 枚を同時に投げる. 少なくとも 1 枚は表であるとき, 2 枚とも表である確率を求めよ.

2. 次の確率を求めよ. (S 級 1 分, A 級 1 分 50 秒, B 級 3 分, C 級 5 分)

(1) 表に $1, 2, 3, 4, 5$ と書かれたカードが 5 枚伏せられている. 裏は見分けがつかない.
1 枚めくってそれが 3 以下であるとき, 2 枚目をめくって奇数を引く確率を求めよ.

(2) コイン 3 枚を同時に投げる. 少なくとも 1 枚は表であるとき, 3 枚とも表である確率を求めよ.

反射テスト　場合の数・確率　条件付き確率　02　解答解説

1.　次の確率を求めよ. (S 級 1 分, A 級 1 分 50 秒, B 級 3 分, C 級 5 分)

★ 条件付き確率

事象 A が起こったときに事象 B が起こる確率 $P_A(B)$ は,

$$\boldsymbol{P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}} \quad\Leftrightarrow\quad \boldsymbol{P(A\cap B)=P(A)\,P_A(B)} \quad (\text{確率の乗法定理})$$

ちなみに, $P(A\cap B)=P(A)\,P(B)$ が成り立つとき, 事象 A と B は互いに **独立** という.

(1)　表に $1,2,3$ と書かれたカードが 3 枚伏せられている. 裏は見分けがつかない. 1 枚めくってそれが奇数であるとき, 2 枚目をめくって偶数を引く確率を求めよ.

★ 条件付き確率

$$P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$$

事象 A は「1 枚目が奇数」　$\Rightarrow$　$P(A)=\dfrac{2}{3}$

事象 B は「2 枚目が偶数」　$\Rightarrow$　$P(A\cap B)=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{2}$

$$P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}}=\frac{\frac{1}{3}\times 3}{\frac{2}{3}\times 3}=\boldsymbol{\frac{1}{2}} \quad \textbf{…答え}$$

☆問の表現に気をつけよう.

「〜である **とき**, 〜である確率」というような表現があれば **条件付き確率** と考える.

☆別解　奇数が 1 枚で出たので, 残りは奇数 1 偶数 1.　$\Rightarrow$　ここから偶数を引く確率は, $\boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$

☆ちなみに $P(B)=\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$. 興味がある方は次の類題を考えてみてほしい. アメリカで色々と話題になった問題である.

☆ モンティホール問題

(1) のように 3 枚のカードが伏せられている. 最終的にプレイヤーが選んだカードが「1」であれば景品をもらえる.

① プレイヤーが 3 枚の中から好きなカードを選ぶ.

② マスターが残りの 2 枚のうち 1 枚を開けて,「1」でないことを見せる.

　　(マスターは「1」の場所を知っていて,「1」でないものを見せる.)

③ プレイヤーが最終的に開けるカードを決める. 最初に選んだカードでもよいし, 残っている 1 枚でもよい.

さて, プレイヤーは③のときに選ぶカードを変更した方がいいのだろうか?. (解答は最後のページ)

(2)　コイン 2 枚を同時に投げる. 少なくとも 1 枚は表であるとき, 2 枚とも表である確率を求めよ.

★ 条件付き確率

$$P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$$

事象 A を「2 枚のコインのうち少なくとも 1 枚は表」　$\Rightarrow$　$P(A)=1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{3}{4}$

事象 B を「2 枚とも表」　$\Rightarrow$　$P(A\cap B)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}$

$$P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}}=\frac{\frac{1}{4}\times 4}{\frac{3}{4}\times 4}=\boldsymbol{\frac{1}{3}} \quad \textbf{…答え}$$

☆間違えやすい問題である. 1 枚は表であるから, 残り 1 枚が表である確率を考えて, $\dfrac{1}{2}$ としてはいけない. 早くやろうとすると失敗する問題である. 事象 A が事象 B に依存しているかどうかを考えることができるか注意が必要. 言葉をかえると, 事象 A が B と独立であるかどうかということ. 独立性の詳細は数 $2B$ の「統計」の「確率変数の独立性」参照.

2. 次の確率を求めよ.（S 級 1 分, A 級 1 分 50 秒, B 級 3 分, C 級 5 分）

(1) 表に $1, 2, 3, 4, 5$ と書かれたカードが 5 枚伏せられている. 裏は見分けがつかない.
1 枚めくってそれが 3 以下であるとき, 2 枚目をめくって奇数を引く確率を求めよ.

★ 条件付き確率

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

事象 A は「1 枚目が 3 以下」 $\Rightarrow$ $P(A) = \dfrac{3}{5}$

事象 B は「2 枚目が奇数」

$P(A \cap B)$ を考える. 事象は全部で ${}_5\mathrm{P}_2 = 5 \times 4 = 20$ 通り.

$A \cap B$ となる場合は $1-3$, $1-5$, $2-1$, $2-3$, $2-5$, $3-1$, $3-5$ の 7 通り.

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{7}{20}}{\frac{3}{5}} = \frac{\frac{7}{20} \times 20}{\frac{3}{5} \times 20} = \mathbf{\frac{7}{12}}$$ **…答え**

(2) コイン 3 枚を同時に投げる. 少なくとも 1 枚は表であるとき, 3 枚とも表である確率を求めよ.

★ 条件付き確率

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

事象 A を「3 枚のコインのうち少なくとも 1 枚は表」 $\Rightarrow$ $P(A) = 1 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^3 = \dfrac{7}{8}$

事象 B を「3 枚とも表」 $\Rightarrow$ $P(A \cap B) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^3 = \dfrac{1}{8}$

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{7}{8}} = \frac{\frac{1}{8} \times 8}{\frac{7}{8} \times 8} = \mathbf{\frac{1}{7}}$$ **…答え**

☆モンティホール問題の解答 **変更したほうがよい.**

一見確率が変わらないように思える. しかし, 確率 $\dfrac{1}{3}$ であったものが確率 $\dfrac{2}{3}$ に上がることが次の考察でわかる.

①でプレイヤーが「1」を選択する確率は $\dfrac{1}{3}$ である. このあとマスターは必ず「1」でないものを見せるので,
最終段階の③でプレイヤーが変更しなければ,「1」が当たる確率は, $\dfrac{1}{3} \times 1 = \dfrac{1}{3}$ である.

次に③で変更する場合を考えよう.

①で「1」を選択 ⇒ ②でマスターが「2」を見せる ⇒ ③で「3」を選択.
①で「1」を選択 ⇒ ②でマスターが「3」を見せる ⇒ ③で「2」を選択.
①で「2」を選択 ⇒ ②でマスターが「3」を見せる ⇒ ③で「1」を選択.
①で「3」を選択 ⇒ ②でマスターが「2」を見せる ⇒ ③で「1」を選択.

と考えられるので, $\dfrac{1}{3} \times \dfrac{0}{2} + \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{1} + \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{1} = \dfrac{2}{3}$.

つまり, 変更しなければ当たる確率は $\dfrac{1}{3}$ であり, 変更すれば当たる確率は $\dfrac{2}{3}$ となる.

この問題はアメリカのクイズ番組で実際に行われ, マリリン・ボス・サバントが「変更すれば確率が 2 倍になる」とコラムで発表したところ, 高名な数学者を含めた多くの人々から反論されたといういわくつきの問題である. ちなみにサバントは「最も高い IQ」を有しているとギネス公認を受けたことでも知られている.