反射テスト　場合の数　組み合わせ　確率最大　02　反復試行

1.　2 人で N 回ジャンケンをして，負けない回数を数える．最も確率が高いときの負けない回数を N で表せ．

（ S 級 4 分，A 級 6 分，B 級 8 分，C 級 10 分 ）

2. 赤玉 1 個, 白玉 3 個が袋の中にある. この袋の中から 1 回引いて, 色を確認したあと袋にもどす. これを N 回くり返す. 白玉を何回引いたかについて考えるとき, 最も確率が高いときの白玉を引いた回数を N で表せ.

(S 級 4 分, A 級 6 分, B 級 8 分, C 級 10 分)

反射テスト　場合の数　組み合わせ　確率最大　02　反復試行　解答解説

1.　2 人で N 回ジャンケンをして，負けない回数を数える．最も確率が高いときの負けない回数を N で表せ．
（ S 級 4 分，A 級 6 分，B 級 8 分，C 級 10 分 ）

①　負けない回数が x である確率を $P(x)$ と表す．$x=0,1,2,\cdots,N$ について，$P(x)$ を求める．

2 人の 1 回勝負で負けない確率は　$\dfrac{2}{3}$

★ 反復試行　確率 p の事象が n 回中 r 回出現する確率は　$\boldsymbol{{}_n\mathrm{C}_r\, p^r\,(1-p)^{n-r}}$

$$\text{確率 } P(x)={}_N\mathrm{C}_x\left(\frac{2}{3}\right)^x\left(\frac{1}{3}\right)^{N-x}=\frac{N!}{x!(N-x)!}\left(\frac{2}{3}\right)^x\left(\frac{1}{3}\right)^{N-x}\quad (\,x=0,1,2,\cdots,N\,)$$

②　$x=0,1,2,\cdots,N-1$ のとき，$\dfrac{P(x+1)}{P(x)}$ を求める．

$$P(x+1)={}_N\mathrm{C}_{x+1}\left(\frac{2}{3}\right)^{x+1}\left(\frac{1}{3}\right)^{N-(x+1)}\quad (\,x=0,1,2,\cdots,N-1\,)$$

$$\begin{aligned}\frac{P(x+1)}{P(x)}&={}_N\mathrm{C}_{x+1}\left(\frac{2}{3}\right)^{x+1}\left(\frac{1}{3}\right)^{N-1-x}\div{}_N\mathrm{C}_x\left(\frac{2}{3}\right)^x\left(\frac{1}{3}\right)^{N-x}\\&=\frac{N!}{(x+1)!\,(N-1-x)!}\left(\frac{2}{3}\right)^{x+1}\left(\frac{1}{3}\right)^{N-x}\cdot\frac{x!(N-x)!}{N!}\left(\frac{3}{2}\right)^x\left(\frac{3}{1}\right)^{N-x}\\&=\frac{x!}{(x+1)!}\cdot\frac{(N-x)!}{(N-1-x)!}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{x+1}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^x\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{N-1-x}\cdot\left(\frac{3}{1}\right)^{N-x}\\&=\frac{N-x}{x+1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{1}=\frac{2(N-x)}{x+1}\quad (\,x=0,1,2,\cdots,N-1\,)\end{aligned}$$

③　確率 $P(x)$ が最大になるときの x の値を考える．

★ 反復試行確率 (${}_n\mathrm{C}_r$ の式) の大小は倍率で判断する
$$\begin{cases}\dfrac{P(x+1)}{P(x)}\leqq 1 & \Leftrightarrow\quad P(x)\geqq P(x+1)\\[2mm] \dfrac{P(x+1)}{P(x)}\geqq 1 & \Leftrightarrow\quad P(x)\leqq P(x+1)\end{cases}$$

$x=0,1,2,\cdots N-1$ より，$x+1>0$ であるから，

$$\frac{P(x+1)}{P(x)}\geqq 1\quad\Leftrightarrow\quad\frac{2(N-x)}{x+1}\geqq 1\quad\Leftrightarrow\quad x\leqq\frac{2N-1}{3}\qquad\left(\frac{P(x+1)}{P(x)}\leqq 1\quad\Leftrightarrow\quad x\geqq\frac{2N-1}{3}\right)$$

ここで場合分けをする．$N=3m,3m+1,3m+2$ $(m=0,1,2,3,\cdots)$ とおけば，上の倍率判定から，

$N=3m$ のとき，　$\frac{2N-1}{3}=2m-\frac{1}{3}$　$P(0)<P(1)<\cdots<P(2m-1)<P(2m)>P(2m+1)>\cdots>P(N)$

$N=3m+1$ のとき，　$\frac{2N-1}{3}=2m+\frac{1}{3}$　$P(0)<P(1)<\cdots<P(2m)<P(2m+1)>P(2m+2)>\cdots>P(N)$

$N=3m+2$ のとき，　$\frac{2N-1}{3}=2m+1$　$P(0)<P(1)<\cdots<P(2m+1)=P(2m+2)>P(2m+3)>\cdots>P(N)$

答え　最も確率が高いのは $m=0,1,2,3,\cdots$ に対して，次のとき．

負けない回数が
$$\begin{cases}\boldsymbol{2m}\text{ 回} & (\;\boldsymbol{N=3m}\;)\\ \boldsymbol{(2m+1)}\text{ 回} & (\;\boldsymbol{N=3m+1}\;)\\ \boldsymbol{(2m+1)}\text{ 回と }\boldsymbol{(2m+2)}\text{ 回} & (\;\boldsymbol{N=3m+2}\;)\end{cases}$$

☆最後の場合分けについて

$\frac{2N-1}{3}$ が整数のとき $P(x+1)=P(x)$ となり，答えが 2 つ出てくるので場合分けが必要．

$$N=3m\quad\Rightarrow\quad\frac{2N-1}{3}=2m-\frac{1}{3}\qquad\text{このとき}\begin{cases}2m-1<\frac{2N-1}{3} & \text{から}\quad P(2m-1)<P(2m)\\ \frac{2N-1}{3}<2m & \text{から}\quad P(2m)>P(2m+1)\end{cases}$$

よくわからなければ具体例 反復試行確率最大 01 も参照する．

☆概算の見直し　期待値が $\dfrac{2}{3}\times N=\dfrac{2}{3}N$ だから，答えはこの近くにある．

2.　赤玉 1 個, 白玉 3 個が袋の中にある. この袋の中から 1 回引いて, 色を確認したあと袋にもどす. これを N 回くり返す. 白玉を何回引いたかについて考えるとき, 最も確率が高いときの白玉を引いた回数を N で表せ.

（ S 級 4 分, A 級 6 分, B 級 8 分, C 級 10 分 ）

①　白玉を x 回引く確率を $P(x)$ と表す. $x = 0, 1, 2, \cdots, N$ について, $P(x)$ を求める.

1 回引いてそれが白玉である確率は　$\dfrac{1}{3}$

★ 反復試行　確率 p の事象が n 回中 r 回出現する確率は　$\boldsymbol{{}_n\mathrm{C}_r\, p^r\, (1-p)^{n-r}}$

$$\text{確率 } P(x) = {}_N\mathrm{C}_x \left(\frac{3}{4}\right)^x \left(\frac{1}{4}\right)^{N-x} \quad (\, x = 0, 1, 2, \cdots, N \,)$$

$$= \frac{N!}{x!(N-x)!} \left(\frac{3}{4}\right)^x \left(\frac{1}{4}\right)^{N-x} \quad (\, x = 0, 1, 2, \cdots, N \,)$$

②　$x = 0, 1, 2, \cdots, N-1$ のとき, $\dfrac{P(x+1)}{P(x)}$ を求める.

$$P(x+1) = {}_N\mathrm{C}_{x+1} \left(\frac{3}{4}\right)^{x+1} \left(\frac{1}{4}\right)^{N-(x+1)} \quad (\, x = 0, 1, 2, \cdots, N-1 \,)$$

$$\frac{P(x+1)}{P(x)} = {}_N\mathrm{C}_{x+1} \left(\frac{3}{4}\right)^{x+1} \left(\frac{1}{4}\right)^{N-1-x} \div {}_N\mathrm{C}_x \left(\frac{3}{4}\right)^x \left(\frac{1}{4}\right)^{N-x}$$

$$= \frac{N!}{(x+1)!\,(N-1-x)!} \left(\frac{3}{4}\right)^{x+1} \left(\frac{1}{4}\right)^{N-x} \cdot \frac{x!(N-x)!}{N!} \left(\frac{4}{3}\right)^x \left(\frac{4}{1}\right)^{N-x}$$

$$= \frac{x!}{(x+1)!} \cdot \frac{(N-x)!}{(N-1-x)!} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{x+1} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^x \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{N-1-x} \cdot \left(\frac{4}{1}\right)^{N-x}$$

$$= \frac{N-x}{x+1} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{1} = \frac{3(N-x)}{x+1} \quad (\, x = 0, 1, 2, \cdots, N-1 \,)$$

③　確率 $P(x)$ が最大になるときの x の値を考える.

★ 反復試行確率 ($\boldsymbol{{}_n\mathrm{C}_r}$の式) の大小は倍率で判断する
$$\begin{cases} \dfrac{P(x+1)}{P(x)} \leqq 1 & \Leftrightarrow \quad P(x) \geqq P(x+1) \\ \dfrac{P(x+1)}{P(x)} \geqq 1 & \Leftrightarrow \quad P(x) \leqq P(x+1) \end{cases}$$

$x = 0, 1, 2, \cdots N-1$ より, $x + 1 > 0$ であるから,

$$\frac{P(x+1)}{P(x)} \geqq 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3(N-x)}{x+1} \geqq 1 \quad \Leftrightarrow \quad x \leqq \frac{3N-1}{4} \qquad \left(\frac{P(x+1)}{P(x)} \leqq 1 \quad \Leftrightarrow \quad x \geqq \frac{3N-1}{4} \right)$$

ここで場合分けをする. $N = 4m, 4m+1, 4m+2, 4m+3$ $(m = 0, 1, 2, 3, \cdots)$ とおけば, 上の倍率判定から,

$\boldsymbol{N = 4m}$ のとき,　$\frac{3N-1}{4} = 3m - \frac{1}{4}$　$P(0) < P(1) < \cdots < P(3m-1) < P(3m) > P(3m+1) > \cdots > P(N)$
$\boldsymbol{N = 4m+1}$ のとき,　$\frac{3N-1}{4} = 3m + \frac{1}{2}$　$P(0) < P(1) < \cdots < P(3m) < P(3m+1) > P(3m+2) > \cdots > P(N)$
$\boldsymbol{N = 4m+2}$ のとき,　$\frac{3N-1}{4} = 3m + \frac{5}{4}$　$P(0) < P(1) < \cdots < P(3m+1) < P(3m+2) > P(3m+3) > \cdots > P(N)$
$\boldsymbol{N = 4m+3}$ のとき,　$\frac{3N-1}{4} = 3m + 2$　$P(0) < P(1) < \cdots < P(3m+2) = P(3m+3) > P(3m+4) > \cdots > P(N)$

答え　最も確率が高いのは $\boldsymbol{m = 0, 1, 2, 3, \cdots}$ に対して, 次のとき.

白玉を引く回数が
$$\begin{cases} \boldsymbol{3m} \text{ 回} & (\, \boldsymbol{N = 4m} \,) \\ \boldsymbol{(3m+1)} \text{ 回} & (\, \boldsymbol{N = 4m+1} \,) \\ \boldsymbol{(3m+2)} \text{ 回} & (\, \boldsymbol{N = 4m+2} \,) \\ \boldsymbol{(3m+2)} \text{ 回と } \boldsymbol{(3m+3)} \text{ 回} & (\, \boldsymbol{N = 4m+3} \,) \end{cases}$$

☆概算の見直し　期待値が $\dfrac{3}{4} \times N = \dfrac{3}{4}N$ だから, 答えはこの近くにある.