# 反射テスト　場合の数　組み合わせ　確率最大　01　反復試行

**1.**　2 人で 8 回ジャンケンをしたとき，あいこの回数を $x$ で表す.（ $S$ 級 3 分，$A$ 級 4 分 30 秒，$B$ 級 6 分，$C$ 級 8 分 ）

(1)　あいこが $x$ 回である確率を $P(x)$ と表す. $x = 0, 1, 2, \cdots, 8$ について，$P(x)$ を求めよ.

(2)　$x = 0, 1, 2, \cdots, 7$ のとき，$\dfrac{P(x+1)}{P(x)}$ を求めよ.

(3)　確率 $P(x)$ が最大になるときの $x$ の値を求めよ.

**2.** サイコロを 10 回なげるとき，1 が出ない回数を $x$ で表す.（ $S$ 級 3 分，$A$ 級 4 分 30 秒，$B$ 級 6 分，$C$ 級 8 分 ）

(1) 1 が出ない回数が $x$ である確率を $P(x)$ と表す. $x = 0, 1, 2, \cdots, 10$ について，$P(x)$ を求めよ.

(2) $x = 0, 1, 2, \cdots, 9$ のとき，$\dfrac{P(x+1)}{P(x)}$ を求めよ.

(3) 確率 $P(x)$ が最大になるときの $x$ の値を求めよ.

# 反射テスト　場合の数　組み合わせ　確率最大　01　反復試行　解答解説

**1.**　2人で8回ジャンケンをしたとき，あいこの回数を $x$ で表す．( $S$ 級3分，$A$ 級4分30秒，$B$ 級6分，$C$ 級8分 )

(1)　あいこが $x$ 回である確率を $P(x)$ と表す．$x=0,1,2,\cdots,8$ について，$P(x)$ を求めよ．

2人で1回勝負であいこになる確率は　$\dfrac{1}{3}$

**★ 反復試行**

確率 $p$ の事象が $n$ 回中 $r$ 回出現する確率は　${}_n\mathrm{C}_r\, p^r\,(1-p)^{n-r}$

$$\text{確率 } P(x)={}_8\mathrm{C}_x\left(\frac{1}{3}\right)^x\left(\frac{2}{3}\right)^{8-x}\qquad (x=0,1,2,3,4,5,6,7,8)$$

$$=\frac{8!}{x!(8-x)!}\left(\frac{1}{3}\right)^x\left(\frac{2}{3}\right)^{8-x}\qquad (x=0,1,2,3,4,5,6,7,8)$$

(2)　$x=0,1,2,\cdots,7$ のとき，$\dfrac{P(x+1)}{P(x)}$ を求めよ．

$$P(x+1)={}_8\mathrm{C}_{x+1}\left(\frac{1}{3}\right)^{x+1}\left(\frac{2}{3}\right)^{8-(x+1)}\qquad (x=0,1,2,3,4,5,6,7)$$

$$\frac{P(x+1)}{P(x)}={}_8\mathrm{C}_{x+1}\left(\frac{1}{3}\right)^{x+1}\left(\frac{2}{3}\right)^{7-x}\div{}_8\mathrm{C}_x\left(\frac{1}{3}\right)^x\left(\frac{2}{3}\right)^{8-x}$$

$$=\frac{8!}{(x+1)!\{8-(x+1)\}!}\left(\frac{1}{3}\right)^{x+1}\left(\frac{2}{3}\right)^{7-x}\cdot\frac{x!(8-x)!}{8!}\left(\frac{3}{1}\right)^x\left(\frac{3}{2}\right)^{8-x}$$

$$=\frac{x!}{(x+1)!}\cdot\frac{(8-x)!}{(7-x)!}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{x+1}\cdot\left(\frac{3}{1}\right)^x\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{7-x}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{8-x}$$

$$=\frac{8-x}{x+1}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}=\frac{8-x}{2(x+1)}\qquad (x=0,1,2,3,4,5,6,7)$$

(3)　確率 $P(x)$ が最大になるときの $x$ の値を求めよ．

**★ 反復試行確率 (${}_n\mathrm{C}_r$ の式) の大小は倍率で判断する**
$$\begin{cases}\dfrac{P(x+1)}{P(x)}\leqq 1 & \Leftrightarrow\quad P(x)\geqq P(x+1)\\[2mm] \dfrac{P(x+1)}{P(x)}\geqq 1 & \Leftrightarrow\quad P(x)\leqq P(x+1)\end{cases}$$

$x=0,1,2,\cdots 7$ より，$x+1>0$ であるから，

$$P(x)\leqq P(x+1)\quad\Leftrightarrow\quad\frac{P(x+1)}{P(x)}\geqq 1\quad\Leftrightarrow\quad\frac{8-x}{2(x+1)}\geqq 1\quad\Leftrightarrow\quad x\leqq 2$$

$$P(x)\geqq P(x+1)\quad\Leftrightarrow\quad\frac{P(x+1)}{P(x)}\leqq 1\quad\Leftrightarrow\quad\frac{8-x}{2(x+1)}\leqq 1\quad\Leftrightarrow\quad x\geqq 2$$

以上から　$P(0)<P(1)<P(2)=P(3)>P(4)>P(5)>P(6)>P(7)>P(8)$　　**$x=2,3$ のとき**，$P(x)$ が最大

☆期待値が $\dfrac{1}{3}\times 8=\dfrac{8}{3}$ だから答えはこの近くにある．

☆ (1), (2) がなくても (3) が求められるように．

**2.** サイコロを 10 回なげるとき，1 が出ない回数を $x$ で表す.（ $S$ 級 3 分，$A$ 級 4 分 30 秒，$B$ 級 6 分，$C$ 級 8 分 ）

(1) 1 が出ない回数が $x$ である確率を $P(x)$ と表す. $x=0,1,2,\cdots,10$ について，$P(x)$ を求めよ.

サイコロを 1 回なげて 1 が出ない確率は $\dfrac{5}{6}$

**★ 反復試行**

確率 $p$ の事象が $n$ 回中 $r$ 回出現する確率は $\boldsymbol{{}_n\mathrm{C}_r\, p^r\,(1-p)^{n-r}}$

$$\text{確率 } P(x)=\boldsymbol{{}_{10}\mathrm{C}_x\left(\frac{5}{6}\right)^x\left(\frac{1}{6}\right)^{10-x} \quad (\,x=0,1,2,\cdots,10\,)}$$

$$=\boldsymbol{\frac{10!}{x!(10-x)!}\left(\frac{5}{6}\right)^x\left(\frac{1}{6}\right)^{10-x} \quad (\,x=0,1,2,\cdots,10\,)}$$

(2) $x=0,1,2,\cdots,9$ のとき，$\dfrac{P(x+1)}{P(x)}$ を求めよ.

$$P(x+1)={}_{10}\mathrm{C}_{x+1}\left(\frac{5}{6}\right)^{x+1}\left(\frac{1}{6}\right)^{10-(x+1)} \quad (\,x=0,1,2,\cdots,9\,)$$

$$\frac{P(x+1)}{P(x)}={}_{10}\mathrm{C}_{x+1}\left(\frac{5}{6}\right)^{x+1}\left(\frac{1}{6}\right)^{9-x} \div {}_{10}\mathrm{C}_x\left(\frac{5}{6}\right)^x\left(\frac{1}{6}\right)^{10-x}$$

$$=\frac{10!}{(x+1)!\,\{10-(x+1)\}!}\left(\frac{5}{6}\right)^{x+1}\left(\frac{1}{6}\right)^{9-x}\cdot\frac{x!(10-x)!}{10!}\left(\frac{6}{5}\right)^x\left(\frac{6}{1}\right)^{10-x}$$

$$=\frac{x!}{(x+1)!}\cdot\frac{(10-x)!}{(9-x)!}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{x+1}\cdot\left(\frac{6}{5}\right)^x\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^{9-x}\cdot\left(\frac{6}{1}\right)^{10-x}$$

$$=\frac{10-x}{x+1}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{6}{1}=\boldsymbol{\frac{5(10-x)}{x+1} \quad (\,x=0,1,2,\cdots,9\,)}$$

(3) 確率 $P(x)$ が最大になるときの $x$ の値を求めよ.

**★ 反復試行確率 ($_n\mathrm{C}_r$ の式) の大小は倍率で判断する** $\begin{cases}\dfrac{P(x+1)}{P(x)}\leqq 1 & \Leftrightarrow \quad P(x)\geqq P(x+1)\\[2mm] \dfrac{P(x+1)}{P(x)}\geqq 1 & \Leftrightarrow \quad P(x)\leqq P(x+1)\end{cases}$

$x=0,1,2,\cdots 9$ より，$x+1>0$ であるから，

$$P(x)\leqq P(x+1) \quad\Leftrightarrow\quad \frac{P(x+1)}{P(x)}\geqq 1 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{5(10-x)}{x+1}\geqq 1 \quad\Leftrightarrow\quad x\leqq\frac{49}{6}$$

$$P(x)\geqq P(x+1) \quad\Leftrightarrow\quad \frac{P(x+1)}{P(x)}\leqq 1 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{5(10-x)}{x+1}\leqq 1 \quad\Leftrightarrow\quad x\geqq\frac{49}{6}$$

以上から $P(0)<P(1)<P(2)<\cdots<P(8)<P(9)>P(10)$ **$x=9$ のとき**，$P(x)$ が最大.

☆期待値が $\dfrac{5}{6}\times 10=\dfrac{25}{3}$ だから答えはこの近くにある.

実際 $P(8)=\dfrac{36\cdot 5^8}{6^{10}}$ ，$P(9)=\dfrac{50\cdot 5^8}{6^{10}}$ ，$P(10)=\dfrac{5^8}{6^{10}}$ .