反射テスト　場合の数・確率　重複組み合わせ　01

1.　次の問に答えよ. (S 級 50 秒, A 級 1 分 30 秒, B 級 2 分 40 秒, C 級 4 分)

(1)　2 種類の文字 a, b から重複を許して 3 個とる場合の数を求めよ.

(2)　$(a+b+c)^4$ を展開したときの同類項が何種類できるか求めよ.

(3)　負ではない整数 x, y, z が $x+y+z=8$ を満たすとき, 解 (x, y, z) は何通りできるか求めよ.

2. 次の問に答えよ. (S 級 50 秒, A 級 1 分 30 秒, B 級 2 分 40 秒, C 級 4 分)

(1) 2 種類の文字 a, b から重複を許して 4 個とる場合の数を求めよ.

(2) $(a+b+c+d)^5$ を展開したときの同類項が何種類できるか求めよ.

(3) 自然数 x, y, z が $x+y+z=10$ を満たすとき, 解 (x, y, z) は何通りできるか求めよ.

反射テスト　場合の数・確率　重複組み合わせ　01　解答解説

1.　次の問に答えよ.（ S 級 50 秒, A 級 1 分 30 秒, B 級 2 分 40 秒, C 級 4 分 ）

★ 重複組み合わせ

異なる n 種類のものから, 重複を許して（同じものを繰り返し取ることを許して）r 個取る組み合わせの総数は

$\boldsymbol{{}_{n}\mathrm{H}_{r} = {}_{n+r-1}\mathrm{C}_{r}}$　（ $\boldsymbol{r > n}$ **でもよい** ）

☆上の公式が瞬時に的確に使えるようになればよいがイメージが作りにくいと思う. 次の例の解き方ができれば十分である.

例　a, b, c からを重複を許して 4 つ取る場合の数

①　a, b, c の置く場所を用意する　⇒　○○○○

②　a と b の間を分ける 1 つ目の｜, b と c の間を分ける 2 つ目の｜を考える.

○○○｜｜○　⇔　$aaac$

○｜○○｜○　⇔　$abbc$

｜○○｜○○　⇔　$bbcc$

③　これで全ての場合を考えることができるので,　○と｜を置く位置の場合の数を考えて,

○ 4 つと｜2 つ合わせて 6 つ置く場所があり, そこから○を置く場所を 4 つ選ぶから

${}_{6}\mathrm{C}_{4} = {}_{6}\mathrm{C}_{2} = 15$　⇒　15 通り

（ これが ${}_{3}\mathrm{H}_{4} = {}_{3+4-1}\mathrm{C}_{4}$ であることを確かめよう. ）

(1)　2 種類の文字 a, b から重複を許して 3 個とる場合の数を求めよ.

${}_{2}\mathrm{H}_{3} = {}_{2+3-1}\mathrm{C}_{3} = {}_{4}\mathrm{C}_{3} = 4$

4 通り　…答え

☆全ての場合を表すと

○○○｜　⇔　aaa

○○｜○　⇔　aab

○｜○○　⇔　abb

｜○○○　⇔　bbb

(2)　$(a+b+c)^4$ を展開したときの同類項が何種類できるか求めよ.

★ 具体例を考える

係数は無視してよい. 項の具体例は, $a^4, a^3b, a^2bc, b^2c^2, bc^3, \cdots$ など.

つまり, a, b, c という 3 つの異なるものから, 重複を許して 4 つとる組み合わせを考えればよいので,

${}_{3}\mathrm{H}_{4} = {}_{3+4-1}\mathrm{C}_{4} = {}_{6}\mathrm{C}_{4} = {}_{6}\mathrm{C}_{2} = 15$

15 通り　…答え

(3)　負ではない整数 x, y, z が $x+y+z=8$ を満たすとき, 解 (x, y, z) は何通りできるか求めよ.

☆ $8 = 1+1+1+1+1+1+1+1$ と考える. 例や 1(1) の「○」と, 左の式の「1」を置き換えるとイメージしやすい.

★ 具体例を考える

具体例は, $x = 1+1+1+1$, $y = 1+1+1$, $z = 1$ など.

発想を転換する. $x = 1+1+1+1$ は x のために「1」を 4 つ取ることだが, x を 4 つ選ぶこととも考えられる.

つまり, x, y, z という 3 つの異なるものから, 重複を許して 8 つとる組み合わせを考えればよいので,

${}_{3}\mathrm{H}_{8} = {}_{3+8-1}\mathrm{C}_{8} = {}_{10}\mathrm{C}_{8} = {}_{10}\mathrm{C}_{2} = 45$　　∴　**45 通り　…答え**

☆別解　○｜○○○○｜○○○ のように 2 つの仕切りで 3 つの部屋に分け, 左から x, y, z の部屋と考える.

仕切りをおく場所は 9 箇所あり, 各部屋は○が 0 個でもいいから, 仕切りの重複も考える.

以上から　${}_{9}\mathrm{H}_{2} = {}_{10}\mathrm{C}_{2} = 45$ 通り.

2. 次の問に答えよ.(S 級 50 秒, A 級 1 分 30 秒, B 級 2 分 40 秒, C 級 4 分)

(1) 2 種類の文字 a, b から重複を許して 4 個とる場合の数を求めよ.

$_2\mathrm{H}_4 = {}_{2+4-1}\mathrm{C}_4 = {}_5\mathrm{C}_4 = 5$

5 通り …答え

☆全ての場合を表すと

○○○○ |	⇔	$aaaa$
○○○ | ○	⇔	$aaab$
○○ | ○○	⇔	$aabb$
○ | ○○○	⇔	$abbb$
| ○○○○	⇔	$bbbb$

(2) $(a+b+c+d)^5$ を展開したときの同類項が何種類できるか求めよ.

★ 具体例を考える

係数は無視してよい. 項の具体例は, $a^5, a^3bd, abcd^2, b^2c^3, bc^2d^2, \cdots$ など.

つまり, a, b, c, d という 4 つの異なるものから, 重複を許して 5 つとる組み合わせを考えればよいので,

$_4\mathrm{H}_5 = {}_{4+5-1}\mathrm{C}_5 = {}_8\mathrm{C}_5 = {}_8\mathrm{C}_3 = 56$

56 通り …答え

(3) 自然数 x, y, z が $x+y+z=10$ を満たすとき, 解 (x, y, z) は何通りできるか求めよ.

☆ 1(3) の応用⇒ 1(3) では, x, y, z は 0 以上だが, この問題では 1 以上なので,

初めに, x, y, z それぞれに 1 を振り分ければ, 残りの $10-3=7$ について考えるだけでよい. 1(3) と同様になる.

☆ $7 = 1+1+1+1+1+1+1$ と考える. 例や 1(1) の「○」と, 左の式の「1」を置き換えるとイメージしやすい.

つまり, x, y, z という 3 つの異なるものから, 重複を許して 7 つとる組み合わせを考えればよいので,

$_3\mathrm{H}_7 = {}_{3+7-1}\mathrm{C}_7 = {}_9\mathrm{C}_7 = {}_9\mathrm{C}_2 = 36$ $\therefore$ **36 通り …答え**

☆別解 ○ | ○○○○ | ○○○○○ のように 2 つの仕切りで 3 つの部屋に分け, 左から x, y, z の部屋と考える.

仕切りをおく場所は 9 箇所あり, x, y, z は自然数だから各部屋は○が 1 以上で重複はない.

以上から $_9\mathrm{C}_2 = 36$ 通り.