反射テスト　場合の数・確率　同じものを含む順列　01

1.　場合の数を求めよ. (S 級 55 秒, A 級 1 分 40 秒, B 級 3 分, C 級 4 分 30 秒)

(1)　2 個の a, 3 個の b を 1 列に並べる場合.

(2)　1 個の○, 2 個の △, 2 個の×を 1 列に並べる場合.

(3)　3 個の 1, 2 個の 2, 1 個の 3, 1 個の 4 を並べてできる自然数.

2. 場合の数を求めよ. (S 級 1 分 10 秒, A 級 2 分, B 級 3 分 20 秒, C 級 5 分)

(1) 3 個の a, 4 個の b を 1 列に並べる場合.

(2) 3 個の○, 2 個の △, 2 個の×を 1 列に並べる場合.

(3) 3 個の 0, 5 個の 1, 1 個の 2, 1 個の 3 を並べてできる自然数.
ただし, 0 が最初にきても構わない. 例えば, 0001111123 と並べる場合は, 1111123 という自然数を表すと考える.

反射テスト　場合の数・確率　同じものを含む順列　01　解答解説

1.　場合の数を求めよ.（ S 級 55 秒, A 級 1 分 40 秒, B 級 3 分, C 級 4 分 30 秒 ）

★ 同じものを含む順列

n 個のものの中に, p 個, q 個, r 個, $\cdots$ の同じものがあるとき, これら n 個のもの全部を 1 列に並べる順列の数は,

$$\boldsymbol{\frac{n!}{p!\,q!\,r!\cdots}} \quad \textbf{(ただし } \boldsymbol{p+q+r+\cdots=n} \textbf{)}$$

(1)　2 個の a, 3 個の b を 1 列に並べる場合.

$$\frac{(2+3)!}{2!\ 3!} \quad \leftarrow {}_5\mathrm{C}_2 \text{ と等しい.}$$

$$= \mathbf{10}$$

(2)　1 個の○, 2 個の △, 2 個の×を 1 列に並べる場合.

$$\frac{(1+2+2)!}{1!\ 2!\ 2!}$$

$$= \frac{5!}{2!\ 2!} = \mathbf{30}$$

(3)　3 個の 1, 2 個の 2, 1 個の 3, 1 個の 4 を並べてできる自然数.

$$\frac{(3+2+1+1)!}{3!\ 2!\ 1!\ 1!}$$

$$= \frac{7!}{3!\ 2!} = \mathbf{420}$$

2. 場合の数を求めよ.（S 級 1 分 10 秒, A 級 2 分, B 級 3 分 20 秒, C 級 5 分）

(1) 3 個の a, 4 個の b を 1 列に並べる場合.

$\dfrac{(3+4)!}{3!\ 4!}$ $\leftarrow {}_7\mathrm{C}_3$ と等しい.

$= \mathbf{35}$

(2) 3 個の○, 2 個の △, 2 個の×を 1 列に並べる場合.

$$\frac{(3+2+2)!}{3!\ 2!\ 2!}$$

$$= \frac{7!}{3!\ 2!\ 2!} = \mathbf{210}$$

(3) 3 個の 0, 5 個の 1, 1 個の 2, 1 個の 3 を並べてできる自然数.
ただし, 0 が最初にきても構わない. 例えば, 0001111123 と並べる場合は, 1111123 という自然数を表すと考える.

問題文から, 最初に 0 があってもよいので, 1.(3) と同様に考えられる.

$$\frac{(3+5+1+1)!}{3!\ 5!\ 1!\ 1!}$$

$$= \frac{10!}{3!\ 5!} = \mathbf{5040}$$

☆さて, 桁の指定がある場合の数は何通りだろうか.
つまり, この問題で「10 桁の自然数は何個できるか」という場合である.

正解は $\dfrac{(5+1+1)!}{5!\ 1!\ 1!} \times {}_9\mathrm{C}_6 = 42 \times 84 = 3528$ 個
考え方は ①「0 以外の 7 個 (5 個の 1, 1 個の 2, 1 個の 3) を並べる場合の数」× ②「その 7 つの数字の配置の場合の数」
①はここでのテーマと同様に考えて, $\dfrac{(5+1+1)!}{5!\ 1!\ 1!} = 42$ 通り.
②はこう考える. ①でできた 7 個の数字を, 10 桁の自然数として置き換える.
①の最高位の数字は, 10 桁の自然数の最高位におく. 残った 6 個の数字を置く場所を, 9 桁 (9 個の配置可能な場所) から選び, 残った箇所に 0 をおけばよい.
この 9 個の配置可能な場所から 6 個選ぶのが, ${}_9\mathrm{C}_6 = 84$ 通り.

別解
最初に「3 個の 0」をおく場所を最高位以外の 9 桁から選ぶのが, ${}_9\mathrm{C}_3 = 84$ 通り.
残った 7 個の配置場所から「5 個の 1」をおく場所を選んで, ${}_7\mathrm{C}_5 = 21$ 通り.
残った 2 個の配置場所から「1 個の 2」をおく場所を選んで, ${}_2\mathrm{C}_1 = 2$ 通り.
最後に残った 1 個の配置場所に「1 個の 3」をおけばよい.
よって　$84 \times 21 \times 2 = 3528$ 通り.