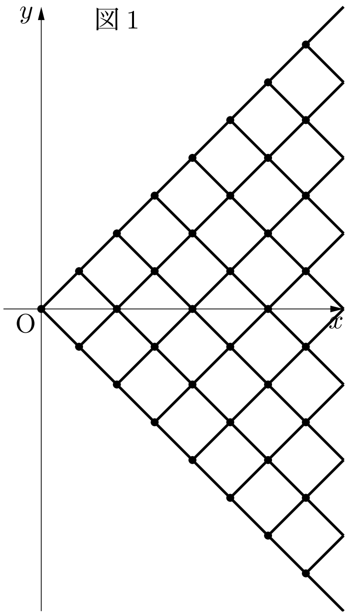
# 反射テスト　場合の数　組み合わせ　カタラン数　02　ランダムウォーク

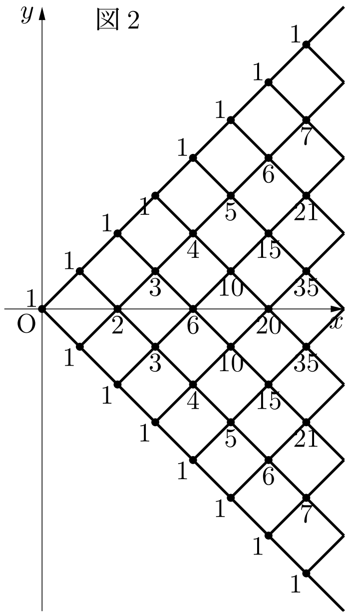
**1.** 　点 P は次のルールで座標平面上を動く点である. 0 秒のとき点 P は原点にいる. 1 秒ごとに点 P の $x$ 座標が 1 ずつ増える. また, 毎秒コインを投げて, 表なら $y$ 座標を $+1$, 裏なら $y$ 座標を $-1$ した点に移動する. 例えば, 最初の 3 秒でコインが表裏裏の順番で出た場合, 点 P は, 1 秒後に $(1, 1)$, 2 秒後に $(2, 0)$, 3 秒後 $(3, -1)$ というように動いていく.
さて, $t$ 秒後の点 P の $y$ 座標が 0 である確率を求めよ.

**2.** 点 P は次のルールで座標平面上を動く点である. 0 秒のとき点 P は原点にいる. 1 秒ごとに点 P の $x$ 座標が 1 ずつ増える. また, 毎秒コインを投げて, 表なら $y$ 座標を $+1$, 裏なら $y$ 座標を $-1$ した点に移動する. 例えば, 最初の 3 秒でコインが表裏裏の順番で出た場合, 点 P は, 1 秒後に $(1,1)$, 2 秒後に $(2,0)$, 3 秒後 $(3,-1)$ というように動いていく.
さて, 自然数 $t$ に対して, $t$ 秒後の点 P の $y$ 座標が初めて 0 になる確率を求めよ.

# 反射テスト　場合の数　組み合わせ　カタラン数　02　ランダムウォーク　解答解説

**1.**　点 P は次のルールで座標平面上を動く点である. 0 秒のとき点 P は原点にいる. 1 秒ごとに点 P の $x$ 座標が 1 ずつ増える. また, 毎秒コインを投げて, 表なら $y$ 座標を $+1$, 裏なら $y$ 座標を $-1$ した点に移動する. 例えば, 最初の 3 秒でコインが表裏裏の順番で出た場合, 点 P は, 1 秒後に $(1,1)$, 2 秒後に $(2,0)$, 3 秒後 $(3,-1)$ というように動いていく.
さて, $t$ 秒後の点 P の $y$ 座標が 0 である確率を求めよ.



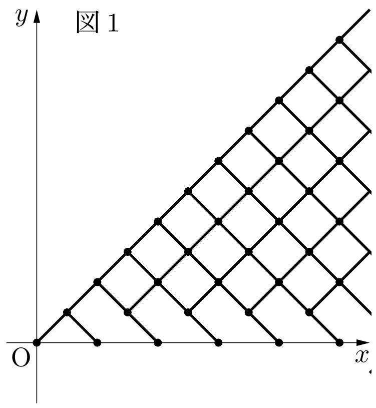

$t$ 秒後の点 P の $y$ 座標が 0 である確率を $p(t)$ とする.
問題文から, 図 1 のような図が描ける.
これは★パスカルの三角形であるから, 図 2 のように場合の数を考えることができて,

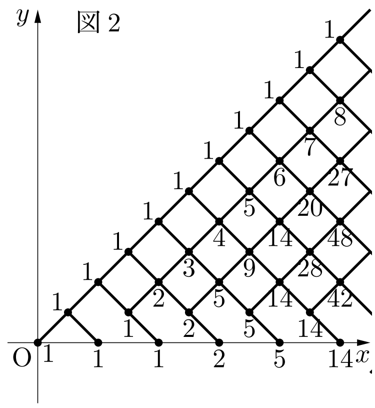
**非負整数 $n$ に対して,**

**$t=2n$ のとき, $p(t)=\dfrac{{}_{2n}\mathrm{C}_n}{2^{2n}}$ .**

**$t=2n+1$ のとき, $p(t)=0$ .**

**2.** 　点 P は次のルールで座標平面上を動く点である．0 秒のとき点 P は原点にいる．1 秒ごとに点 P の $x$ 座標が 1 ずつ増える．また，毎秒コインを投げて，表なら $y$ 座標を $+1$，裏なら $y$ 座標を $-1$ した点に移動する．例えば，最初の 3 秒でコインが表裏裏の順番で出た場合，点 P は，1 秒後に $(1,1)$，2 秒後に $(2,0)$，3 秒後 $(3,-1)$ というように動いていく．
さて，自然数 $t$ に対して，$t$ 秒後の点 P の $y$ 座標が初めて 0 になる確率を求めよ．




$t$ 秒後の点 P の $y$ 座標が 0 である確率を $p(t)$ とする．
図 1 は $t=1$ で表が出た場合についての図である．これについて場合の数を考えると，図 2 のようになる．
これは★カタラン数の図である．

　よって，自然数 $n$ に対して，$t=2n$ のときを考えよう．
$t=1$ で表が出た上で，$t=2n$ のときの点 P の $y$ 座標が 0 である場合の数は，カタラン数が 1 ずれて，$C_{n-1}$．

$C_{n-1}=\dfrac{{}_{2(n-1)}\mathrm{C}_{n-1}}{n}$．

$t=1$ で裏が出た場合も同様であるから，確率 $p(2n)=\dfrac{{}_{2(n-1)}\mathrm{C}_{n-1}}{n2^{2n}}\times 2$ .

まとめると，
**自然数 $n$ に対して，**

$$\boldsymbol{t=2n\ \text{のとき，}\ p(t)=\frac{{}_{2(n-1)}\mathrm{C}_{n-1}}{n2^{2n-1}}}\ .$$

$$\boldsymbol{t=2n-1\ \text{のとき，}\ p(t)=0}\ .$$

**★ ランダムウォーク ( *random walk* )**
酔っ払いがまっすぐ歩こうとするがフラフラ左右に動くとする．このときの元のまっすぐなラインに戻ってくる確率は？
自然数 $n$ に対して，$f(n)=\dfrac{{}_{2(n-1)}\mathrm{C}_{n-1}}{n2^{2n-1}}$ とおく．

$g(x)=\dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}C_nx^n$ とおくと，これは★カタラン数の母関数であるから，$g(x)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$

$$\sum_{n=1}^{\infty}f(n)=\frac{{}_0\mathrm{C}_0}{1\cdot 2}+\frac{{}_2\mathrm{C}_1}{2\cdot 2}\cdot\frac{1}{4}+\frac{{}_4\mathrm{C}_2}{3\cdot 2}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2+\frac{{}_6\mathrm{C}_3}{4\cdot 2}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^3+\cdots$$
$$=g\left(\tfrac{1}{4}\right)=\frac{1}{2}\times\frac{1-\sqrt{1-4\times\frac{1}{4}}}{2\times\frac{1}{4}}=1$$

つまり，いつか必ず戻ってくると言えるかもしれない．