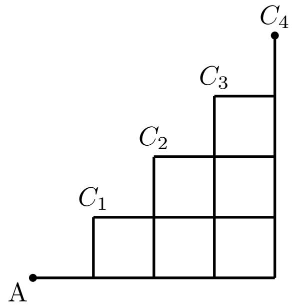
# 反射テスト　場合の数　組み合わせ　カタラン数　01

**1.**　点 A から点 $C_1, C_2, C_3, C_4$ まで遠回りせずに行く方法はそれぞれ何通りあるか.（ $S$ 級 40 秒、$A$ 級 2 分、$B$ 級 4 分、$C$ 級 6 分 ）




ⓒ 数学・算数を楽しむために（ http : //www.enjoymath.sakura.ne.jp/index.html ）

**2.** 次の問に答えよ.（ $S$ 級 4 分、$A$ 級 7 分、$B$ 級 10 分、$C$ 級 15 分 ）

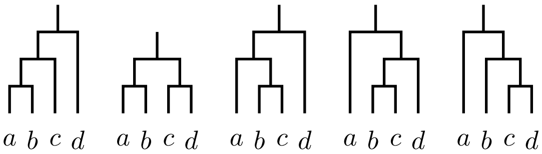
(1) 4 つの数のかけ算で計算順序を決める () のつけ方は何通りあるか.

例 : 2 つの数の積の場合は, $ab$ のみで 1 通り.

例 : 3 つの数の積の場合は, $(ab)c$ , $a(bc)$ の 2 通り.

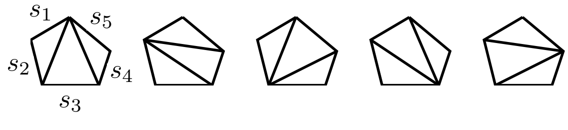
(2) $n$ チームでトーナメント戦 (勝ち抜き戦) を行う場合, その試合の組み方は何通りあるか.

例　4 チームの場合　5 通り




(3) 凸 $n$ 角形 (凹んでいない多角形) を考える. これをいくつかの交わらない対角線で三角形に分割するとき, その分割方法は何通りあるか.

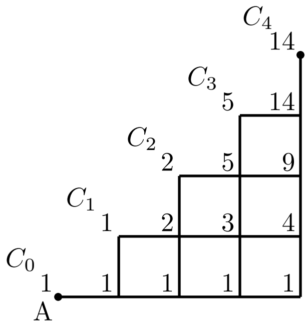
例　凸五角形の場合　5 通り




ⓒ 数学・算数を楽しむために（ http : //www.enjoymath.sakura.ne.jp/index.html ）

# 反射テスト　場合の数　組み合わせ　カタラン数　01　解答解説

**1.**　点 A から点 $C_1, C_2, C_3, C_4$ まで遠回りせずに行く方法はそれぞれ何通りあるか.（ $S$ 級 40 秒、$A$ 級 2 分、$B$ 級 4 分、$C$ 級 6 分 ）




格子の道順を左図のように考えて，$\boldsymbol{C_1 = 1}$**,** $\boldsymbol{C_2 = 2}$**,** $\boldsymbol{C_3 = 5}$**,** $\boldsymbol{C_4 = 14}$**.**
( 組み合わせ格子の道順 , 組み合わせ格子の道順応用 を参照. )

**★カタラン数**　$\boldsymbol{C_n = \dfrac{1}{n+1}\,{}_{2n}\mathrm{C}_n}$
この階段の形のカドの数に注目すると、$1, 1, 2, 5, 14, \cdots$
という数列が得られる。この数列を **カタラン数** と言い、上の公式で数列の計算ができる。証明はパスカルの三角形の応用などいくつか方法がある。

$n = 4$ の場合、$C_4 = \dfrac{1}{4+1}\,{}_8\mathrm{C}_4 = \dfrac{1}{5} \times 70 = 14$

**証明**

図 0　カタラン数 $C_n$

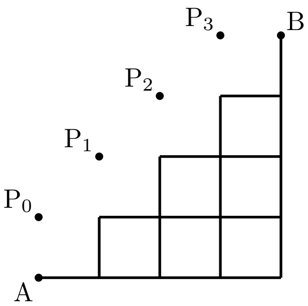



図 1　${}_{2n}\mathrm{C}_n$

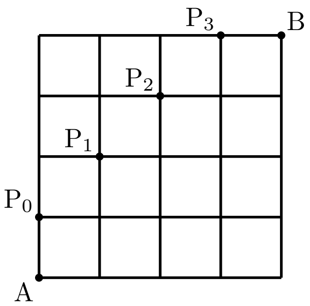
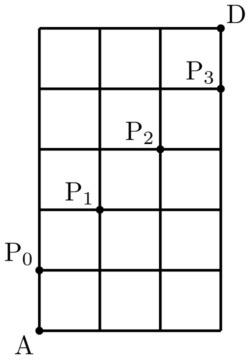



図 2　${}_{2n}\mathrm{C}_{n-1}$




上は $n = 4$ の図であるが，ここから一般化を考える.
図 0 と図 1 から，カタラン数 $C_n$ は図 1 の ${}_{2n}\mathrm{C}_n$ から $\mathrm{P}_0$〜$\mathrm{P}_{n-1}$ を通る経路数を除いたものになることがわかる. 図 2 は図 1 の正方形の格子の縦を 1 マス増やし，横を 1 マス減らした長方形である. 長方形の対称性により，次のことが言える.

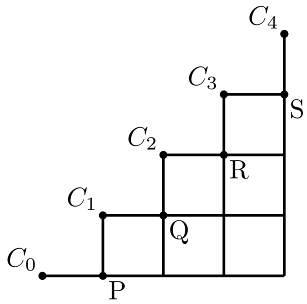
| 図 1 | | 図 2 |
|---|---|---|
| $\mathrm{P}_0 \to \mathrm{B}$ の経路数 | $=$ | $\mathrm{P}_0 \to \mathrm{D}$ の経路数 |
| $\mathrm{P}_0$ を通らない $\mathrm{P}_1 \to \mathrm{B}$ の経路数 | $=$ | $\mathrm{P}_0$ を通らない $\mathrm{P}_1 \to \mathrm{D}$ の経路数 |
| $\mathrm{P}_0, \mathrm{P}_1$ を通らない $\mathrm{P}_2 \to \mathrm{B}$ の経路数 | $=$ | $\mathrm{P}_0, \mathrm{P}_1$ を通らない $\mathrm{P}_2 \to \mathrm{D}$ の経路数 |
| | $\cdots$ | |
| $\mathrm{P}_0, \mathrm{P}_1, \cdots, \mathrm{P}_{n-2}$ を通らない $\mathrm{P}_{n-1} \to \mathrm{B}$ の経路数 | $=$ | $\mathrm{P}_0, \mathrm{P}_1, \cdots, \mathrm{P}_{n-2}$ を通らない図 2 の $\mathrm{P}_{n-1} \to \mathrm{D}$ の経路数 |

図 2 では必ず $\mathrm{P}_0$〜$\mathrm{P}_{n-1}$ のいずれかを通ることから，図 2 で $\mathrm{P}_0$〜$\mathrm{P}_{n-1}$ のいずれかを通る場合の数は，${}_{2n}\mathrm{C}_{n-1}$.

$$\therefore C_n = {}_{2n}\mathrm{C}_n - {}_{2n}\mathrm{C}_{n-1} = \frac{(2n)!}{n!n!} - \frac{(2n)!}{(n-1)!(n+1)!} = \frac{(n+1)(2n)! - n(2n)!}{(n+1)n!n!} = \frac{1}{n+1}\,\frac{(2n)!}{n!n!} = \frac{1}{n+1}\,{}_{2n}\mathrm{C}_n$$

**性質**

図 3




またカタラン数には次の性質がある.

**★カタラン数の漸化式**

$$\boldsymbol{C_n = C_0C_{n-1} + C_1C_{n-2} + C_2C_{n-3} + \cdots + C_{n-1}C_0}$$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $C_0$ を通って $C_1$ を通らない場合の数 | $=$ | $C_0 \times (\mathrm{P} \to \mathrm{S})$ | $=$ | $C_0 \times C_3$ |
| $C_1$ を通って $C_2$ を通らない場合の数 | $=$ | $C_1 \times (\mathrm{Q} \to \mathrm{S})$ | $=$ | $C_1 \times C_2$ |
| $C_2$ を通って $C_3$ を通らない場合の数 | $=$ | $C_2 \times (\mathrm{R} \to \mathrm{S})$ | $=$ | $C_2 \times C_1$ |
| $C_3$ を通る場合の数 | $=$ | $C_0 \times (\mathrm{S} \to \mathrm{S})$ | $=$ | $C_3 \times C_0$ |

$\therefore$　$C_4 = C_0 \times C_3 + C_1 \times C_2 + C_2 \times C_1 + C_3 \times C_0$

ⓒ 数学・算数を楽しむために（ http : //www.enjoymath.sakura.ne.jp/index.html ）

**2.** 次の問に答えよ.（ $S$ 級 4 分、$A$ 級 7 分、$B$ 級 10 分、$C$ 級 15 分 ）

(1) 4 つの数のかけ算で計算順序を決める () のつけ方は何通りあるか.
例 : 2 つの数の積の場合は，$ab$ のみで 1 通り.
例 : 3 つの数の積の場合は，$(ab)c$ , $a(bc)$ の 2 通り.

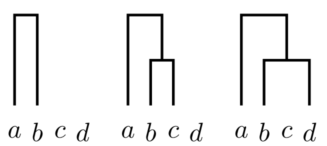
4 つの数の積の場合は,
$((ab)c)d$ , $(ab)(cd)$ , $(a(bc))d$ , $a((bc)d)$ , $a(b(cd))$ の **5 通り**.

この問題は，次のトーナメント戦の問題と同じ問題である. 一般化は次で考える.

(2) $n$ チームでトーナメント戦 (勝ち抜き戦) を行う場合，その試合の組み方は何通りあるか.

4 チームの場合

図 1　　図 2　　図 3




$n$ チームでの場合の数を $A_n$ とおく.
便宜上 $A_1 = 1$ とおく. $A_2 = 1$ は自明.
$A_3$ は，$a$ と $b$ が戦ってから $c$,
$b$ と $c$ が戦ってから $a$ の 2 通りから，$A_3 = 2$.
$n = 4$ のとき,

$a$ と $b$ が戦ってから，他と戦う場合の数 $= A_1 \times A_3$ (図 1 から，最後は 3 チームのトーナメント)
$a$ と ($b$ と $c$ の勝者) が戦ってから，他と戦う場合の数 $= A_2 \times A_2$ (図 2 から，最後は 2 チームのトーナメント)
$a$ と ($b$〜$d$ の勝者) が戦ってから，他と戦う場合の数 $= A_3 \times A_1$ (図 3 から，最後は 1 チームのトーナメント)

$A_4 = A_1 \times A_3 + A_2 \times A_2 + A_3 \times A_1 = 2 + 1 + 1 = 5$.

これを応用して，一般化する.

$a_1$ と $a_2$ が戦ってから，他と戦う場合の数 $= A_1 \times A_{n-1}$
$a_1$ と ($a_2$ と $a_3$ の勝者) が戦ってから，他と戦う場合の数 $= A_2 \times A_{n-2}$
$a$ と ($a_2$〜$a_4$ の勝者) が戦ってから，他と戦う場合の数 $= A_3 \times A_{n-3}$
$\cdots$
$a$ と ($a_2$〜$a_n$ の勝者) が戦ってから，他と戦う場合の数 $= A_{n-1} \times A_1$

$A_n = A_1 \times A_{n-1} + A_2 \times A_{n-2} + A_3 \times A_{n-3} + \cdots + A_{n-1} \times A_1$

これがカタラン数の漸化式と同じ形なので，初項や第 2 項から，$A_n$ はカタラン数 $\boldsymbol{C_{n-1} = \frac{1}{n}\,{}_{2(n-1)}\mathrm{C}_{n-1}}$ である.
また，対戦順を () を用いて表せば，図 2 の場合 $(a(bc))d$ と表記でき，(1) の問題と 1 対 1 対応することもわかる.

(3) 凸 $n$ 角形 (凹んでいない多角形) を考える. これをいくつかの交わらない対角線で三角形に分割するとき，その分割方法は何通りあるか.

例　凸五角形の場合　5 通り

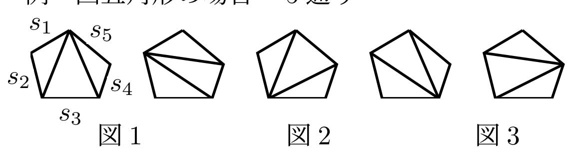
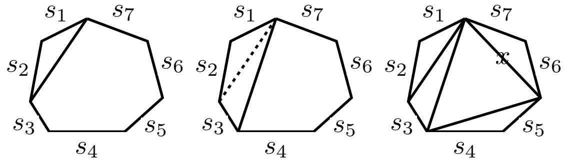



図 1　　図 2　　図 3




凸 $N$ 多角形の分割方法を $D(n)$ とする.
便宜上，$D(3) = 1$ とする. $D(4) = 2, D(5) = 5$.
$n$ 個の辺を反時計回り順に, $s_1, s_2, s_3, \cdots, s_{n-1}, s_n$ とする.
図 1 の場合の対角線を $s_1 s_2$ と表記する.
図 2 の点線の対角線は $s_1 s_2$ であるから,
図 2 の実線の対角線を $(s_1 s_2)s_3$ と表記できる.
図 3 の場合，$(((s_1 s_2)s_3)(s_4 s_5))$ で対角線 $x$ を表せる.
ここで辺 $s_7$ を表す表記を考えると，$(((s_1 s_2)s_3)(s_4 s_5))s_6$ となる.

ちなみに，凸五角形の例にある 5 通りを左から順に表記すると，辺 $s_5$ は,
$((s_1 s_2)s_3)s_4$ , $s_1((s_2 s_3)s_4)$ , $(s_1 s_2)(s_3 s_4)$ , $(s_1(s_2 s_3))s_4$, $s_1(s_2(s_3 s_4))$ となる.

このように (3) の問題は (2) の場合と 1 対 1 対応するから，$D(7) = A(6) = C(5)$ , $D(5) = A(4) = C(3)$.

$$\therefore\quad \boldsymbol{D(n) = C_{n-2} = \frac{1}{n-1}\,{}_{2(n-2)}\mathrm{C}_{n-2}}.$$

ⓒ 数学・算数を楽しむために（ http : //www.enjoymath.sakura.ne.jp/index.html ）