反射テスト　2次関数　全称記号と存在記号　03

1.　$f(x) = x^2 - 2x + a$, $g(x) = -x^2$ とする. 次の条件を満たす a の値の範囲を求めよ.

（ S 級 1 分 10 秒, A 級 3 分, B 級 5 分, C 級 7 分 ）

(1)　$\forall\ x_1 \in \mathbb{R}$, $\forall\ x_2 \in \mathbb{R}$, $f(x_1) > g(x_2)$

(2)　$\exists\ x_1 \in \mathbb{R}$, $\exists\ x_2 \in \mathbb{R}$, $f(x_1) \leqq g(x_2)$

2. $f(x)=x^2-2ax+a$, $g(x)=-x^2$ とする. 次の条件を満たす a の値の範囲を求めよ.

(S 級 1 分 10 秒, A 級 3 分, B 級 5 分, C 級 7 分)

(1) $\forall\ x_1 \in \mathbb{R}$, $\forall\ x_2 \in \mathbb{R}$, $f(x_1) \geqq g(x_2)$

(2) $\exists\ x_1 \in \mathbb{R}$, $\exists\ x_2 \in \mathbb{R}$, $f(x_1) \leqq g(x_2)$

反射テスト　２次関数　全称記号と存在記号　03　解答解説

1.　$f(x)=x^2-2x+a$, $g(x)=-x^2$ とする. 次の条件を満たす a の値の範囲を求めよ.

（ S 級 1 分 10 秒, A 級 3 分, B 級 5 分, C 級 7 分 ）

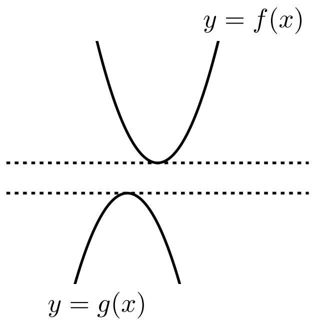
★ 全称記号∀と存在記号∃

あらゆる x に対して $f(x)=0$　⇔　$\forall\ x$ に対して $f(x)=0$　←★恒等式

$f(x)=0$ を満たす x が存在する.　⇔　$\exists\ x$ に対して $f(x)=0$　←★方程式

☆方程式を解いて x はあらゆる数になるときがある. その場合は恒等式とも言える. 恒等式は方程式を包含すると言える.

(1)　$\forall\ x_1\in\mathbb{R}$, $\forall\ x_2\in\mathbb{R}$, $f(x_1)>g(x_2)$



題意　⇔　あらゆる実数 x_1, x_2 に対して, $f(x_1)>g(x_2)$

$y=f(x)$ と $y=g(x)$ について考える.

x_1 と x_2 は異なる変数だから, それぞれ一番極端な場合を考えてよい.
$y=f(x)$ は下に凸, $y=g(x)$ は上に凸だから, 左図のようなイメージ.

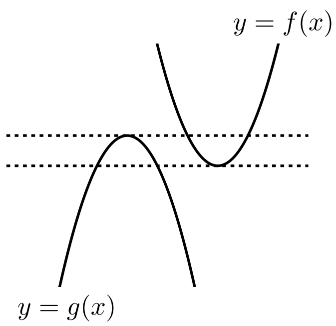
題意　⇔　$y=f(x)$ の頂点の y 座標 $>$ $y=g(x)$ の頂点の y 座標

$f(x)=(x-1)^2+a-1$ であるから, $y=f(x)$ の頂点は $(1, a-1)$

$\therefore\quad a-1>0\quad\Leftrightarrow\quad \boldsymbol{1<a}$

☆ちなみに,「 $\exists\ x_1\in\mathbb{R}$, $\exists\ x_2\in\mathbb{R}$, $f(x_1)>g(x_2)$ 」を満たす a の範囲は,「あらゆる実数」が答えとなる.

(2)　$\exists\ x_1\in\mathbb{R}$, $\exists\ x_2\in\mathbb{R}$, $f(x_1)\leqq g(x_2)$



題意　⇔　$f(x_1)\leqq g(x_2)$ を満たす実数 x_1, x_2 が存在する

$y=f(x)$ と $y=g(x)$ について考える.

x_1 と x_2 は異なる変数だから, それぞれ一番極端な場合を考えてよい.
$y=f(x)$ は下に凸, $y=g(x)$ は上に凸だから, 左図のようなイメージ.

題意　⇔　$y=f(x)$ の頂点の y 座標 $\leqq$ $y=g(x)$ の頂点の y 座標

$f(x)=(x-1)^2+a-1$ であるから, $y=f(x)$ の頂点は $(1, a-1)$

$\therefore\quad a-1\leqq 0\quad\Leftrightarrow\quad \boldsymbol{a\leqq 1}$

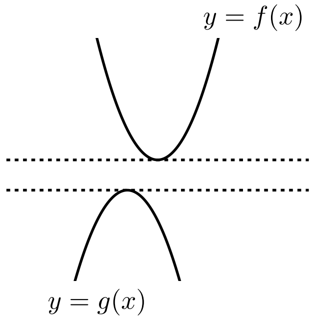
☆ (1) と (2) は余事象の関係になる. つまり (1) の否定が (2).
そのことに気づけば,「$1<a$」の否定 ⇔「$a\leqq 1$」

☆ちなみに,「 $\forall\ x_1\in\mathbb{R}$, $\forall\ x_2\in\mathbb{R}$, $f(x_1)\leqq g(x_2)$ 」を満たす a の範囲は,「ない」が答えとなる.

2. $f(x)=x^2-2ax+a$, $g(x)=-x^2$ とする．次の条件を満たす a の値の範囲を求めよ．

（ S 級 1 分 10 秒, A 級 3 分, B 級 5 分, C 級 7 分 ）

(1) $\forall\ x_1\in\mathbb{R}$, $\forall\ x_2\in\mathbb{R}$, $f(x_1)\geqq g(x_2)$



題意 $\Leftrightarrow$ あらゆる実数 x_1,x_2に対して，$f(x_1)\geqq g(x_2)$

$y=f(x)$ と $y=g(x)$ について考える．

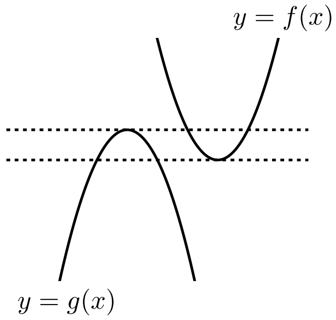
x_1と x_2は異なる変数だから，それぞれ一番極端な場合を考えてよい．
$y=f(x)$ は下に凸，$y=g(x)$ は上に凸だから，左図のようなイメージ．

題意 $\Leftrightarrow$ $y=f(x)$ の頂点の y 座標 $\geqq$ $y=g(x)$ の頂点の y 座標

$f(x)=(x-a)^2+a-a^2$ であるから，$y=f(x)$ の頂点は $\left(a,a-a^2\right)$

$\therefore\quad a-a^2\geqq 0\quad\Leftrightarrow\quad \boldsymbol{0\leqq a\leqq 1}$

(2) $\exists\ x_1\in\mathbb{R}$, $\exists\ x_2\in\mathbb{R}$, $f(x_1)\leqq g(x_2)$



題意 $\Leftrightarrow$ $f(x_1)\leqq g(x_2)$ を満たす実数 x_1,x_2が存在する

$y=f(x)$ と $y=g(x)$ について考える．

x_1と x_2は異なる変数だから，それぞれ一番極端な場合を考えてよい．
$y=f(x)$ は下に凸，$y=g(x)$ は上に凸だから，左図のようなイメージ．

題意 $\Leftrightarrow$ $y=f(x)$ の頂点の y 座標 $\leqq$ $y=g(x)$ の頂点の y 座標

$f(x)=(x-a)^2+a-a^2$ であるから，$y=f(x)$ の頂点は $\left(a,a-a^2\right)$

$\therefore\quad a-a^2\leqq 0\quad\Leftrightarrow\quad$ $\boldsymbol{a\leqq 0}$ **又は** $\boldsymbol{1\leqq a}$